
Colles - planche 01

Thèmes abordés : raisonnements, sommes usuelles.

1 Questions de cours

Question de cours. Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, en mettant en évidence les raisonnements par contraposée et par l'absurde qui seront menés.

Question de cours. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

Question de cours. 1. Énoncer et démontrer la formule du triangle de Pascal.

2. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Développer l'expression $(x - y)^5$.

Question de cours. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 3^n + 2^n$.

Question de cours. 1. Énoncer et démontrer la formule donnant la factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.

2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

Question de cours. Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $y \in \mathbf{R}$, $f(x + y) = x + f(y)$.

2 Quantificateurs

Exercice 1. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction. ◻ ◻ ◻

1. Exprimer verbalement la signification des assertions suivantes :

(a) $\exists C \in \mathbf{R}, \forall x \in I, f(x) = C$;

(b) $\forall x \in I, f(x) = 0 \implies x = 0$.

2. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

(a) f n'est pas la fonction nulle ;

(b) f ne prend jamais deux fois la même valeur.

3. Exprimer les négations des assertions suivantes :

(a) $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in I, f(x) = y$.

(b) $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in I, x < y \implies f(x) \leq f(y)$.

Exercice 2. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction. ◻ ◻ ◻

1. Exprimer verbalement la signification des assertions suivantes :

$$\forall x \in I, \forall y \in I, f(x) = f(y) \implies x = y.$$

2. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

- (a) la fonction f présente un minimum ;
 - (b) f n'est pas une fonction constante.
3. Exprimer les négations des assertions suivantes :
- (a) $\forall y \in \mathbf{R}, f(y) \neq 0$.
 - (b) $\forall x \in I, \forall y \in I, f(x) = f(y) \implies x = y$.

Exercice 3. Montrer que :

○ ○ ○

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \left(n \geq N \implies \left| \frac{2n+1}{n+2} - 2 \right| < \varepsilon \right).$$

Exercice 4. Décrire les parties de $\mathbf{R}$ dans lesquelles évoluent x pour que les assertions suivantes soient vraies :

○ ○ ○

- (a) $(x > 0 \text{ et } x < 1) \text{ ou } x = 0$.
- (b) $x > 3 \text{ et } x < 5 \text{ et } x \neq 4$.
- (c) $(x \leq 0 \text{ et } x > 1) \text{ ou } x = 4$.
- (d) $x \geq 0 \implies x \geq 2$.

3 Principe de récurrence

Exercice 5. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer que tous les termes de la suite sont des entiers.

○ ○ ○

Exercice 6. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

● ○ ○

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 7. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $3^n \geq (n+2)^2$.

● ○ ○

Exercice 8. On définit la suite u par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

● ● ○

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 9. En utilisant un raisonnement de récurrence forte, montrer que pour tout n entier naturel non nul, il existe un unique couple (p, q) d'entiers naturels tel que $n = 2^p(2q+1)$.

● ● ○

Exercice 10. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle telle que $a_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n ,

● ● ○

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}.$$

Montrer que $a_n = 0$ pour tout entier n pair.

4 Disjonction de cas

Exercice 11. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\frac{n(n^2 + 1)}{2}$ est un entier naturel. ○○○

Exercice 12. Existe-t-il un couple $(x, y) \in (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})^2$ tel que $x^y \in \mathbf{Q}$? Prouver que oui en discutant si $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ est un nombre rationnel ou non. ●○○

5 Raisonnement par contraposition

Exercice 13. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, si $n^2 + 3$ n'est pas divisible par 4, alors l'entier n est pair. ○○○

6 Raisonnement par analyse-synthèse

Exercice 14. Démontrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que : ●●○

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \quad f(x - f(y)) = 1 - x - y. \quad (\star)$$

Exercice 15. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ vérifiant : ●●○

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

7 Coefficients binomiaux

Exercice 16. Résoudre l'équation $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n$, d'inconnue $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. ○○○

8 Sommes

Exercice 17. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer $\sum_{k=2}^{n+2} \binom{n+1}{k-2} 3^k$. ○○○

Exercice 18. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer la somme : ○○○

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}.$$

Exercice 19. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer la somme : ○○○

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Exercice 20. 1. Démontrer l'identité de Sophie Germain : pour tout $(a, b) \in \mathbf{C}^2$, ●○○

$$4a^4 + b^4 = (2a^2 + 2ab + b^2)(2a^2 - 2ab + b^2).$$

2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Simplifier la somme $\sum_{k=1}^n \frac{4k}{4k^4 + 1}$.

Exercice 21. Calculer simplement $999\,999^3$.

• ○ ○

Exercice 22. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Calculer

• ○ ○

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}.$$

Exercice 23. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite d'éléments de $[0; 1]$. Montrer que

• ○ ○

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \prod_{k=1}^n (1 - a_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^n a_k.$$

Exercice 24. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

• ○ ○

$$u_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n,$$

est un entier pair.

Exercice 25. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Simplifier $S = \sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} k \binom{n}{k}$.

• ○ ○

Exercice 26. Montrer que :

• ○ ○

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \dots$$

Exercice 27. Soit $(a, b, c, n) \in \mathbf{C}^3 \times \mathbf{N}$. Développer $(a + b + c)^n$.

• ○ ○

Exercice 28. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer

• ○ ○

$$1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11 \dots 11}_{1 \text{ apparaît } n \text{ fois}}.$$

Exercice 29. Soit $n \in \mathbf{N}$. On considère la fonction f , définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par $f(x) = (1 + e^x)^n$. En dérivant deux fois f , donner l'expression de :

• • ○

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}.$$

Exercice 30. Soit $(n, x) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R} \setminus \{1\}$. On pose, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

• • ○

$$P_k(x) = \sum_{p=0}^{k-1} x^p.$$

Montrer que,

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_k(x) = 2^{n-1} P_n\left(\frac{1+x}{2}\right).$$

Exercice 31. Soit p et n deux entiers naturels non nuls. On pose

• • ○

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p.$$

1. Rappeler, sans démonstration, l'expression de $S_1(n)$. On admettra dans la suite que

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2. En calculant de deux manières différentes la somme télescopique

$$\sum_{k=0}^n ((k+1)^{p+1} - k^{p+1}),$$

montrer que :

$$\sum_{i=1}^p \binom{p+1}{i} S_i(n) = (n+1)^{p+1} - (n+1).$$

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

9 Produits

Exercice 32. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Simplifier $P_n = \prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{1}{p}\right)$.

○ ○ ○