
Colles - planche 02

Thèmes abordés : parties de $\mathbf{R}$, généralités sur les fonctions, fonctions usuelles.

1 Questions de cours

Question de cours. Montrer que toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Question de cours. Donner la définition, le graphe et la dérivée de Arccos (on demande la preuve de la dérivabilité et le calcul de l'expression de la fonction dérivée).

Question de cours. Donner la définition, le graphe et la dérivée de Arcsin (on demande la preuve de la dérivabilité et le calcul de l'expression de la fonction dérivée).

Question de cours. Donner la définition, le graphe et la dérivée de Arctan (on demande la preuve de la dérivabilité et le calcul de l'expression de la fonction dérivée).

Question de cours. On considère la fonction définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par $f(x) = \sqrt{2} \cos(x) - \sqrt{2} \sin(x)$.

1. Déterminer un couple $(A, \varphi) \in \mathbf{R}^2$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = A \cos(x + \varphi)$.
2. Tracer la courbe représentative de f .

Question de cours. Soit $(n, x) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}_+^*$. Simplifier $\sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(kx)$.

Question de cours. Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer la dérivée n -ième de la fonction $\ln$.

Question de cours. Énoncer le théorème de croissances comparée (sans démonstration). Fonctions hyperboliques : définition de ch et sh , dérivée, tableaux de variations, représentation graphique et formule de trigonométrie hyperbolique.

Question de cours. Énoncer le théorème de la bijection. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-x}$ admet un unique point fixe sur $\mathbf{R}$.

Question de cours. Définition de la notion de bijection. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ et donner l'expression de sa réciproque.

Question de cours.

1. Donner la définition de la notion de partie de $\mathbf{R}$ majorée.
2. Donner la définition de la notion de maximum d'une partie de $\mathbf{R}$.
3. Montrer que $[-5; -1[$ n'admet pas de maximum.

2 Inégalités

Exercice 1. 1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, $\sin(x) \leq x$.

◦ ◦ ◦

2. On considère $f : \mathbf{R}^{+\star} \longrightarrow \mathbf{R}$. Montrer pour tout $k \in \mathbf{N}^{\star}$, pour tout $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$,
- $$x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$$
- $$|f'(x)| \leq \frac{1}{k\pi}.$$

- Exercice 2.** 1. Calculer la dérivée 3-ième de $\varphi : x \longmapsto \sin(x) - x + \frac{x^3}{3!}$, et en déduire que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin(x)$. ○○○
2. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$.

- Exercice 3.** 1. On introduit $\varphi : \mathbf{R}^{+\star} \longrightarrow \mathbf{R}$. Donner le signe de φ sur $\mathbf{R}^{+\star}$. ○○○
- $$x \longmapsto \frac{x^2 - 1}{2x} - \ln(x)$$
2. En déduire que pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $\frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$.

3 Dérivées n -ième

- Exercice 4.** La fonction f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = e^x \sin x$. Etablir l'égalité : ○○○

$$f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right),$$

pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \geq 1$.

- Exercice 5.** Soit $n \in \mathbf{N}^{\star}$. La fonction f_n est définie sur $\mathbf{R}^{\star}$ par $f_n(x) = x^{n-1} e^{1/x}$. Etablir l'égalité : ●●○

$$f_n^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{e^{1/x}}{x^{n+1}},$$

pour $x \in \mathbf{R}^{\star}$.

- Exercice 6.** Soit $n \in \mathbf{N}^{\star}$. Soit $f_n : \mathbf{R}^{+\star} \longrightarrow \mathbf{R}$. Déterminer la dérivée n -ième de f_n . ●●○
- $$x \longmapsto x^n \ln x$$

4 Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances

- Exercice 7.** Résoudre dans $\mathbf{R}_+^{\star}$ l'équation $x^{(x^x)} = (x^x)^x$. ○○○

- Exercice 8.** 1. On pose $\varphi :]0, 2[\longrightarrow \mathbf{R}$ ●●○
- $$x \longmapsto x \ln x + (2-x) \ln(2-x)$$
- Montrer que pour tout $x \in]0, 2[$, $0 \leq \varphi(x) < \ln 4$.
2. Soient p et q deux réels strictement positifs vérifiant $p + q = 2$. Montrer que $p^p q^q \in [1, 4]$.

- Exercice 9.** 1. Montrer que pour tout $x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$. ●●○
2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.
- Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

- Exercice 10.** 1. On admet que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$. En déduire que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x)$. ●●○
2. Soit $p \geq 2$ un entier. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{pn}$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$. ○○○

5 Fonctions hyperboliques

Exercice 11. Soit a un réel strictement positif. Exprimer uniquement à l'aide de $\sqrt{a+1}$ le réel $\operatorname{ch}(\ln(\sqrt{a} + \sqrt{a+1}))$. ○○○

Exercice 12. Soit $x \in \mathbf{R}^*$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $f_n(x) = \prod_{k=0}^n \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$. Le but de l'exercice est d'étudier la limite de $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ (avec x fixé). ●●○

- Calculer $\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{\operatorname{sh}(y)}{y}$.
- Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $\operatorname{ch}(x) = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2 \operatorname{sh}(x)}$.
- Conclure.

6 Fonctions trigonométriques

Exercice 13. Résoudre l'équation $(E) : \sin(x) \tan(x) + 2 \cos(x) = 2$ d'inconnue réelle x . ○○○

Exercice 14. Résoudre l'équation $(E) : \sin x + \frac{\cos 2x}{2 \cos x} = 0$ d'inconnue x réelle. ○○○

Exercice 15. Résoudre l'équation $(E) : \sin x + \frac{1}{4 \cos x} = 0$ d'inconnue x réelle. ○○○

Exercice 16. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$

$$x \longmapsto 4x^2 - 3x - \frac{1}{2}$$
 ○○○

- Déterminer le nombre de racines de f et leur position par rapport à -1 et 1 .
- Soit $x \in \mathbf{R}$. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.
- En déduire l'ensemble des racines réelles de f .

Exercice 17. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation suivante. ○○○

$$\sin(x) + \sqrt{3} \cos(x) = \sqrt{2}.$$

Exercice 18. L'équation de la trajectoire d'un projectile lancé avec une vitesse initiale v_0 suivant une direction faisant un angle α avec l'horizontale est donnée par : ●○○

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}(1 + \tan^2 \alpha)x^2 + (\tan \alpha)x, \quad x \in [0; X(\alpha)],$$

où g est l'accélération de la pesanteur et $X(\alpha)$ l'abscisse du point du sol où retombe le projectile. On suppose que v_0 est donnée et que le lanceur peut choisir α dans $]0; \frac{\pi}{2}[$.

- Comment lancer le plus loin possible ?
- Montrer que tous les points du sol accessibles, en dehors du point optimal, peuvent être atteints de deux manières exactement : par un tir tendu et par un tir en cloche.

7 Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 19. Calculer la valeur exacte de $x = \sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{Arcsin} \frac{1}{3}\right)$.

○○○

Exercice 20. Vérifier l'égalité $2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} = \operatorname{Arctan} \frac{4}{3}$.

○○○

Exercice 21. 1. Démontrer que $\varphi : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)$ établit une bijection de son ensemble de définition sur un ensemble à déterminer.

○○○

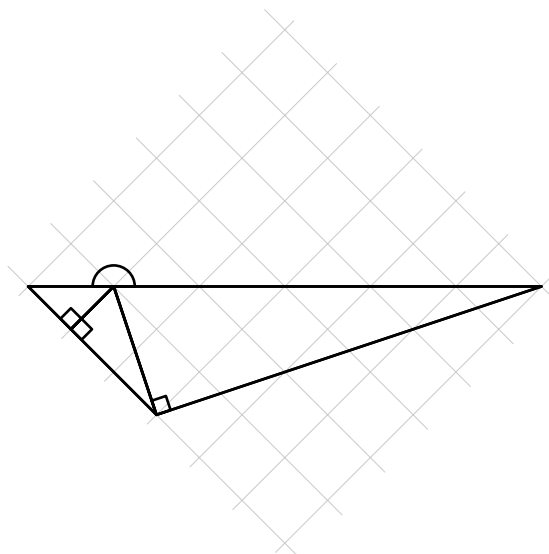
2. Résoudre l'équation $(E) : \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ d'inconnue $x \in [-1, 1]$.

Exercice 22. Déterminer le signe sur $\mathbf{R}$ de $f : x \mapsto \frac{e^{\pi x} - 1}{1 + x^2} - \pi \operatorname{Arctan}(x)$.

○○○

Exercice 23. Deviner une expression de $\operatorname{Arctan}(1) + \operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3)$ à l'aide du dessin suivant, puis démontrer cette conjecture.

○○○



Exercice 24. 1. Justifier que $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2}{5}\right) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{3}{5}\right) \leq \frac{\pi}{2}$.

○○○

2. Résoudre l'équation $\operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2}{5}\right) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{3}{5}\right)$ d'inconnue x réelle.

Exercice 25. On pose $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}(1 - 2x^2)$.

●○○

1. Donner le domaine de définition D de f .

2. Cette fonction est-elle paire ? impaire ?

3. Simplifier l'expression de f .

Exercice 26. Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$.

●○○

1. Déterminer le domaine de définition de f .

2. La fonction f est-elle paire ? impaire ? périodique ? En déduire un domaine d'étude possible de cette fonction.
3. Simplifier l'expression de f .

Exercice 27. Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x)$. • • ○

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que $f : x \mapsto \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(x)$.

Exercice 28. Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{x-1}\right) + \operatorname{Arctan}(2x^2)$. • • ○

1. Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de f .
2. Simplifier l'expression de f .

Exercice 29. 1. La fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(2x) - \operatorname{Arcsin}(x\sqrt{3}) - \operatorname{Arcsin}(x)$ est-elle paire ? Impaire ? • • ○

2. Résoudre l'équation $(E) : \operatorname{Arcsin}(2x) - \operatorname{Arcsin}(x\sqrt{3}) = \operatorname{Arcsin}(x)$ d'inconnue $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Exercice 30. On considère l'équation $(E) : \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2}$ d'inconnue réelle x . • • ○

1. Démontrer que (E) admet une unique solution.
2. Résoudre (E) .

Exercice 31. Résoudre l'équation $\operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arccos}(2x) = a$ d'inconnue réelle x , pour $a = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{6}$. • • ○

Exercice 32. 1. Montrer que, pour tout $x \in [-1/2, 1/2]$, il existe $u \geq 0$ tel que • • ○

$$2\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{3(1-4x^2)} = \frac{1}{\sqrt{1+u} + \sqrt{u}}$$

2. Résoudre l'équation $\operatorname{Arcsin}(2x) - \operatorname{Arcsin}(x\sqrt{3}) = \operatorname{Arcsin}(x)$ d'inconnue $x \in [-1/2, 1/2]$.