
Colles - planche 03

Thèmes abordés : nombres complexes.

1 Questions de cours

Question de cours. Énoncer la première et la deuxième inégalité triangulaire. Démontrer la première égalité triangulaire, ainsi que le cas d'égalité.

Question de cours. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Définir les racines n -ième de l'unité puis donner leur expression.
2. Calculer la somme et le produit des racines n -ièmes de l'unité.
3. Résoudre l'équation $z^3 = 1 + \sqrt{3}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Question de cours. Soit $(n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

1. Donner la factorisation de $1 + e^{i\theta}$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^n \cos(\theta k)$.

Question de cours. Résoudre l'équation $z^4 - 3iz^2 + i - 3 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Question de cours. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Factoriser $\cos(a) + \cos(b)$ et $\sin(a) + \sin(b)$ en utilisant la forme factorisée de $e^{ia} + e^{ib}$.
2. Linéariser $\cos(a) \cos(b)$.
3. Linéariser $\cos(a)^3$.

Question de cours. 1. Soit $X^2 + bX + c$ un trinôme, où $(b, c) \in \mathbb{C}^2$. Énoncer les relations liant coefficients et racines de ce trinôme.

2. En utilisant le résultat précédent, résoudre sans calcul de discriminant l'équation $x^2 + (4 + 2i)x + 3 + 2i = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}$.

Question de cours. Énoncer et démontrer la formule de De Moivre.

Question de cours. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire.

Question de cours. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Donner la définition de « racine n -ième de l'unité ».
2. Donner la liste des racines n -ièmes de l'unité.
3. Calculer la somme et le produit des racines n -ièmes de l'unité.

Question de cours. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner la factorisation de $e^{i\theta} + 1$ et $e^{i\theta} - 1$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.

2 Généralités sur les nombres complexes

Exercice 1. Soient a, b et z trois complexes de module 1 deux à deux distincts. ○○○

1. Simplifier $az|z - a|^2$.
2. Démontrer que :

$$\frac{b}{a} \left(\frac{z - a}{z - b} \right)^2 \in \mathbf{R}_+^*.$$

Exercice 2. 1. Soit $z \in \mathbf{C}$. Démontrer que $z = \bar{z}$ si et seulement si $z \in \mathbf{R}$. ○○○

2. Soit $(u, v) \in \mathbf{C}^2$. Montrer que si $|u| = 1$, $|v| = 1$ et $uv \neq -1$, alors $A = \frac{u + v}{1 + uv}$ est un nombre réel.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $\left(\frac{19 + 7i}{9 - i} \right)^n + \left(\frac{20 + 5i}{7 + 6i} \right)^n \in \mathbf{R}$. ○○○

Exercice 4. 1. Soit $z \in \mathbf{U}$ dont on note θ l'argument principal. Montrer que ○○○

$$z^2 + (\bar{z})^2 = 2 \cos^2(\theta) - 2 \sin^2(\theta),$$

puis exprimer ce nombre en fonction de $\cos(2\theta)$.

2. Déterminer tous les nombres complexes z de module 1 qui satisfont :

$$\left| \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1.$$

Exercice 5. Démontrer que $\left\{ \frac{\Im(z^5)}{(\Im z)^5} : z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R} \right\}$ admet un plus petit élément. ●○○

Exercice 6. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soient $z_1, z_2, \dots, z_n$ des nombres complexes non nuls dont les modules sont tous égaux. Montrer que ●●○

$$\Re \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{z_j}{z_k} \right) = 0 \iff \sum_{k=1}^n z_k = 0.$$

Exercice 7. Soit $(u, v) \in \mathbf{C}^2$. On pose $z = u + iv$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $|z|^2 = u^2 + v^2$. ●●○

3 Sommes

Exercice 8. Soit $n \in \mathbf{N}$. ○○○

1. Donner de deux manières différentes la forme algébrique du nombre complexe

$$z = (1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n.$$

2. En déduire, lorsque n est pair, la valeur de :

$$1 - 3 \binom{n}{2} + 9 \binom{n}{4} + \dots + (-3)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{n}.$$

Exercice 9. Soit $(a, n) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{N}$. ○○○

1. Développer l'expression $(1 + i\sqrt{a})^{2n}$.
2. (a) Calculer le réel $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k} a^k$.
(b) Donner une expression simple du résultat lorsque $a = 3$.

Exercice 10. Soit $(n, z) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{C}$. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Simplifier $\sum_{k=1}^n (z + \omega^k)^n$. • • •

Exercice 11. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{3n-1} (-1)^k \binom{6n}{2k+1} 3^k$. • • •

Exercice 12. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $\{a_0, \dots, a_{n-1}\} \in \mathbf{C}^n$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on pose $b_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=0}^{n-1} a_p e^{2ipk\pi/n}$. • • •

Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $a_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=0}^{n-1} b_p e^{-2ipk\pi/n}$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Prouver que : • • •

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} = 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}$$

et

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} = 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4}$$

Exercice 14. Soit m un entier impair, $m > 1$. On pose $\omega = e^{2i\pi/(2m)}$. Montrer que • • •

$$\frac{1}{1 - \omega} = \sum_{p=0}^{\frac{m-1}{2}} \omega^{2p}.$$

Exercice 15. Soit $n \in \mathbf{N}$. • • •

1. Montrer que $(1+i\sqrt{2})^{2n+1} = R_n + i\sqrt{2}S_n$, où $R_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} (-2)^k$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} (-2)^k$.
2. Montrer que S_n n'est pas divisible par 5.

4 Equations

Exercice 16. Déterminer l'ensemble des solutions du système d'inconnue complexe z , $\begin{cases} |z| = 1 \\ iz = \bar{z} \end{cases}$. • • •

Exercice 17. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$ les solutions de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$. • • •
Calculer $z_1^{1\,999} + z_2^{1\,999}$ et $z_1^{2\,000} + z_2^{2\,000}$

Exercice 18. Résoudre l'équation d'inconnue réelle x :

$$1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) + \cos(5x) = 0.$$

Exercice 19. Résoudre l'équation $4z^2 + 8|z|^2 = 8$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$. ○○○

Exercice 20. Résoudre l'équation $z^3 = \bar{z}$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$. ○○○

Exercice 21. Résoudre l'équation ○○○

$$(E) : z^4 = 5(z-1)(z^2 - z + 1),$$

d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.

Exercice 22. Soit $\theta \in [0; \pi[$. Résoudre sur $\mathbf{C}$ l'équation l'équation ○○○

$$z^2 + 2\cos\theta(1 + \cos\theta)z + (1 + \cos\theta)^2 = 0.$$

Exercice 23. Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $z^n + \frac{1}{z^n}$. ●○○

Exercice 24. Résoudre l'équation $z^3 + z^2 + (-1 + 3i)z + 44 + 12i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$, sachant qu'elle admet une racine réelle. ●●○

Exercice 25. 1. Montrer que les solutions de l'équation $t^2 - at = 1$ d'inconnue $t \in \mathbf{C}$ sont de module 1. ●●○

2. Soit $(z_1, z_2) \in (\mathbf{C}^*)^2$ tel qu'il existe $a \in [-2; 2]$ vérifiant :

$$z_1^2 - az_1z_2 + z_2^2 = 0.$$

(a) Montrer qu'il existe α tel que $\frac{z_1}{z_2} = e^{i\alpha}$.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $a_n \in [-2; 2]$ tel que

$$z_1^{2n} - a_n z_1^n z_2^n + z_2^{2n} = 0.$$

5 Relations coefficients/racines

Exercice 26. On pose $u = e^{2i\pi/7}$, $S = u + u^2 + u^4$ et $T = u^3 + u^5 + u^6$. Calculer $S + T$ et ST . En déduire les valeurs de ces complexes. ●○○

6 Racines de l'unité

Exercice 27. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $\omega \in \mathbf{U}_n$. Considérons $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z - \omega^k| \leq 1$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. ●○○

1. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $|z|^2 \leq z(\overline{\omega^k}) + \bar{z}\omega^k$.

2. En sommant les inégalités obtenues à la question précédente, montrer que $z = 0$.

Exercice 28. Démontrer que $z = \frac{2+i}{2-i}$ est un nombre complexe de module 1 qui n'est racine n -ième de l'unité pour aucun $n \in \mathbf{N}^*$. ●●●

7 Géométrie

Exercice 29. Quel est l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie $z + \bar{z} = |z|$? ○ ○ ○

Exercice 30. Un touriste fait un voyage à travers une ville par étapes. Chaque étape est composée de trois segments de longueur 100 mètres, séparés par des virages à droite de 60 degrés. A la fin d'une étape, le touriste tourne de 60 degré à gauche, et il passe à une nouvelle étape. A quelle distance le touriste sera-t-il de sa position initiale après 1997 étapes? ● ● ○

Exercice 31. Déterminer s'il est possible ou non de considérer 2000 points sur le cercle unité tels que les distances entre deux de ces points soient toutes des nombres rationnels (les distances sont prises le long des cordes). ● ● ●