
Colles - planche 04

Thèmes abordés : calcul de primitives, équations différentielles.

1 Questions de cours

Question de cours. Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2x^2 + 4x + 5}$ sur $\mathbf{R}$.

Question de cours. 1. Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
2. Calculer une primitive de $t \mapsto \cos(3t)e^{2t}$.

Question de cours. 1. À l'aide d'une intégration par parties, donner une primitive de $\ln$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$, donner une primitive de $t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$.

Question de cours. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle

$$y'' + 2y' - 8y = e^{2x}$$

Question de cours. À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$, calculer $\int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$. On admettra qu'une primitive de $\ln$ sur $\mathbf{R}_+^*$ est $x \mapsto x \ln(x) - x$.

Question de cours. Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 6x + 5}$.

2 Primitives

Exercice 1. Calculer une primitive de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}$ sur $\mathbf{R}^{+*}$.

Indication 1. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 2. 1. Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles telle que, pour tout $x \in [a, b]$, $f(a+b-x) = f(x)$. À l'aide d'un changement de variable, montrer que :

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

2. Calculer $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos(x)^2} dx$.

Indication 2. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 3. 1. Déterminer a et b tels que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin x + \cos x = a \cos(b-x)$.

2. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\tan(x) + 1) dx$.

Indication 3. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 4. A l'aide de deux intégrations par parties, calculer une primitive de $x \mapsto \sin(\ln x)$ sur $\mathbf{R}^{+*}$.

Indication 4. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 5. Calculer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ sur $\mathbf{R}^{+*}$ à l'aide du changement de variable $u = \sqrt[6]{x}$.

Indication 5. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 6. Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$.

Indication 6. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 7. En intégrant par parties, calculer une primitive de $x \mapsto e^{\operatorname{Arcsin} x}$.

Indication 7. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 8. Avec le changement de variable $t = x + \sin x$, calculer une primitive de $x \mapsto \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{x + \sin x}$.

Indication 8. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 9. Avec le changement de variable $t = \sin x - \cos x$, calculer une primitive de $x \mapsto \frac{\sin x + \cos x}{2 - \sin(2x)}$.

Indication 9. Il n'y a pas encore d'indication.

3 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 10. Le but de l'exercice est de trouver les applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, dérivables sur $\mathbf{R}$ et vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad (\star)$$

1. Déterminer une application non nulle vérifiant $(\star)$.
2. Soit f une application dérivable sur $\mathbf{R}$ vérifiant $(\star)$.
 - (a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f'(x)f(y) = f(x)f'(y)$.
 - (b) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = \lambda f(x)$, puis résoudre cette équation différentielle.
3. Déterminer toutes les applications dérivables vérifiant $(\star)$.

Indication 10. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 11. On considère l'équation différentielle

$$(1+x^2)y' = 1+3xy \quad (\star)$$

Démontrer que les solutions réelles de $(\star)$, définies sur $\mathbf{R}$, sont les fonctions f_λ telles que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f_\lambda(x) = P(x) + \lambda(1+x^2)^r,$$

où λ est un nombre réel, r un nombre rationnel à préciser et P une fonction polynomiale de degré 3 à expliciter.

Indication 11. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 12. On cherche les fonctions f continues sur $\mathbf{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = 1 + \int_0^x t f(t) dt$.

1. Justifier qu'une telle fonction est nécessairement dérivable sur $\mathbf{R}$.
2. Déterminer une équation différentielle dont f doit être solution.
3. En déduire les fonctions recherchées.

Indication 12. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 13. On considère l'équation différentielle :

$$|x|y' - y = x^2 \quad (\star)$$

1. Résoudre $(\star)$ sur $\mathbf{R}^{+\star}$.
2. Résoudre $(\star)$ sur $\mathbf{R}^{-\star}$.
3. Résoudre $(\star)$ sur $\mathbf{R}$.

Indication 13. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 14. 1. On considère l'équation différentielle :

$$xy' + y + x = 0 \quad (\text{E})$$

- (a) Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbf{R}^{+\star}$, puis sur $\mathbf{R}^{-\star}$.
 - (b) Cette équation différentielle admet-elle des solutions définies sur $\mathbf{R}$?
2. On considère l'équation différentielle (de Bernoulli) :

$$xy' - xy^2 - y = 0 \quad (\text{B})$$

On admet que si y est une solution de (B) autre que la solution nulle, alors la fonction y ne s'annule jamais. Résoudre (B).

Indication 14. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 15. Résoudre l'équation différentielle $(1 + e^x)y'' + y - e^x y = 0$ en posant $z = y + y'$.

Indication 15. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 16. Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbf{R}$ et telles que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x)f(-x) = 1$ (on pourra considérer la fonction $x \mapsto f(x)f(-x)$).

Indication 16. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 17. Soit $f : x \mapsto 1 + \frac{e^x}{1+x^2}$. Donner une équation différentielle dont f est solution.

Indication 17. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 18. 1. Calculer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (on pourra faire le changement de variable $u = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$).

2. Résoudre l'équation différentielle (E) : $(1+x^2)y' + xy = 1$.

Indication 18. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 19. 1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}^\star$, $\frac{x^2 - 1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.

2. Résoudre l'équation différentielle $(E) : (1 + x^2)y' + \frac{x^2 - 1}{x}y = -2$ sur $\mathbf{R}^{+\star}$.

Indication 19. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 20. 1. Déterminer la dérivée de $x \mapsto \ln(1 + e^x)$.

2. Résoudre l'équation différentielle $(E) : (e^x + 1)y' - y = \frac{e^x}{1 + x^2}$.
3. Donner la solution y_0 de (E) qui vérifie $y_0(0) = -\frac{\pi}{4}$.

Indication 20. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 21. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $xy' - ny = 0$, où $n \in \mathbf{N}^*$.

Indication 21. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 22. Résoudre $(E) : (1 + x^2)y + xy = \sqrt{1 + x^2}$.

Indication 22. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 23. Résoudre $(E) : \operatorname{ch}(t)y' + \operatorname{sh}(t)y = \frac{1}{1 + t^2}$.

Indication 23. Il n'y a pas encore d'indication.

4 Equations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 24. 1. Résoudre, sur $\mathbf{R}$, l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = e^x$.

2. Considérons l'équation différentielle $x^2y'' - xy' + y = x$ d'inconnue $y : \mathbf{R}^{+\star} \rightarrow \mathbf{R}$. Montrer qu'en effectuant le changement de variable $x = e^t$, on peut se ramener à l'équation de la question précédente. En déduire les solutions de cette équation.

Indication 24. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 25. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 4y' + 13y = \cos(x)$.

Indication 25. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 26. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = 9e^x - 2$.

Indication 26. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 27. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $(E) : y'' + y = \sin(\omega x)$ en fonction du paramètre $\omega \in \mathbf{R}$.

Indication 27. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 28. Résoudre $(E) : y'' + 5y' - 6y = e^t$.

Indication 28. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 29. Résoudre $(E) : y'' + 4y' + 13y = e^{-t}$.

Indication 29. Il n'y a pas encore d'indication.

Exercice 30. Résoudre $(E) : y'' + y = \cos(2t)$.

Indication 30. Il n'y a pas encore d'indication.