
Colles - planche 05

Thèmes abordés : ensembles et applications.

1 Questions de cours

Question de cours. Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.

1. Supposons que f et g sont injectives. Montrer que $g \circ f$ est injective.
2. Supposons que f et g sont surjectives. Montrer que $g \circ f$ est surjective.
3. Supposons que f et g sont bijectives. Montrer que $g \circ f$ est bijective.

Question de cours. 1. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E . Définir la réunion $\bigcup_{i \in I} A_i$ et l'intersection $\bigcap_{i \in I} A_i$ de ces parties.

2. Soit A et B deux parties de E . Montrer que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Question de cours. 1. Donner des exemples d'applications : injectives et non surjective, surjective et non injective, ni surjective ni injective, bijective.

2. Montrer que l'application sh est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$, et déterminer sa fonction réciproque en terme de la fonction $\ln$.

Question de cours. Montrer par double inclusion l'égalité d'ensembles

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x - y = 1\} = \{(t + 1, 4t + 3) : t \in \mathbf{R}\}.$$

Question de cours. Montrer par double inclusion l'égalité d'ensembles

$$\{t \longmapsto Ae^t + Be^{-t} : (A, B) \in \mathbf{R}^2\} = \{t \longmapsto A \text{ch}(t) + B \text{sh}(t) : (A, B) \in \mathbf{R}^2\}.$$

Question de cours. 1. Donner les définitions d'image directe et d'image réciproque d'une partie par une application.

2. Soit E et F deux ensembles, $f \in F^E$, $A \in \mathcal{P}(E)$, $B \in \mathcal{P}(F)$. Comparer A et $f^{-1}(f(A))$, B et $f(f^{-1}(B))$.

Question de cours. Soit E et F deux ensembles, $f \in F^E$, $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E)$, $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(F)$ telles que $A_1 \subset A_2$ et $B_1 \subset B_2$.

1. Comparer $f(A_1)$ et $f(A_2)$.
2. Comparer $f^{-1}(B_1)$ et $f^{-1}(B_2)$.

2 Ensembles

Exercice 1. Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Montrer que $A = B$ si et seulement si $A \cup B = A \cap B$.

Exercice 2. Soient A, B et C trois ensembles. Montrer que $A \cup B = A \cap C$ si et seulement si $B \subset A \subset C$.

Exercice 3. Soient A, B et C trois ensembles tels que $\begin{cases} A \cup B & \subset & A \cup C \\ A \cap B & \subset & A \cap C \end{cases}$. Montrer que $B \subset C$.

Exercice 4. Soient E et I deux ensembles. Pour tout $i \in I$, on considère A_i et B_i des parties de E vérifiant $A_i \cup B_i = E$. Montrer que

$$E = \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right).$$

Exercice 5. 1. Soit a un élément. Décrire l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$.

2. Etant donné A et B deux parties d'un ensemble E . Justifier que :

$$(E \setminus A) \setminus (E \setminus B) = B \setminus A.$$

Exercice 6. Soit E un ensemble. Pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, on appelle différence symétrique de A et B l'ensemble

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Soient A, B et C trois parties de E . Montrer que :

1. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
2. $A \Delta B = A \Delta C \iff B = C$.
3. $A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$.
4. $A \Delta B = A \cap B \implies A = B = \emptyset$.

Exercice 7. Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Résoudre l'équation $A \cap X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice 8. Soit E un ensemble. On appelle fonction caractéristique d'une partie A dans E l'application :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_A : E &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Soient A et B deux parties de E . De quels ensembles les fonctions suivantes sont-elles les fonctions caractéristiques ?

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $\min\{\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\}$; | 3. $\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$; | 5. $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$; |
| 2. $\max\{\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\}$; | 4. $1 - \mathbf{1}_A$; | 6. $(\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2$. |

Exercice 9. Soit X, Y et Z trois parties d'un ensemble E . On note

$$A = (X \cup Z) \cap (Y \cup \overline{Z}) \quad \text{et} \quad B = (X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z).$$

1. Montrer que $A = (X \cap Y) \cup B$.
2. En utilisant la question précédente, compléter l'assertion suivante (on ne demande pas de justification) :

$$A = B \iff X \cap Y \subset \dots$$

3. Montrer que $A = B$.

Exercice 10. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E . Montrer que

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C).$$

Exercice 11. Montrer par double inclusion l'égalité

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto Ae^t + Be^{-t} \end{array} : (A, B) \in \mathbf{R}^2 \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto A \operatorname{ch}(t) + B \operatorname{sh}(t) \end{array} : (A, B) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

Exercice 12. Soit E un ensemble. Soit A, B et C des parties de E .

1. Démontrer la relation $(A \cup B) \cap C \subset A \cup (B \cap C)$.
2. Etablir qu'il y a égalité dans l'inclusion précédente si et seulement si $A \subset C$.

3 Généralités sur les applications

Exercice 13. Soit f une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbf{R}$. On suppose que, pour toutes parties A et B de E ,

$$A \cap B = \emptyset \implies f(A \cup B) = f(A) + f(B).$$

Montrer que, pour toutes parties A et B de E ,

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B).$$

Exercice 14. Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F . Montrer que pour tous $A \subset E$ et $B \subset F$,

$$f(f^{-1}(B) \cap A) = B \cap f(A).$$

Exercice 15. Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$. Montrer que f est bijective si et seulement si pour tout partie A de E , $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ (pour tout $B \in \mathcal{P}(E)$, on note $\overline{B}$ le complémentaire de B dans E)

4 Applications injectives, surjectives, bijectives

Exercice 16. 1. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Factoriser $a^3 - b^3$.

2. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Développer et simplifier l'expression $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}$.

3. Montrer que l'application $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est injective.
$$x \longmapsto x^3 + 2x + 1$$

Exercice 17. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow [-1, 1]$.
$$x \longmapsto \sin(\pi x)$$

1. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.

2. Déterminer $f^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$.

Exercice 18. Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ trois applications. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f , g et h sont bijectives.

Exercice 19. Soient A, B deux parties non vides d'un ensemble E . Soit

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X &\longmapsto (X \cap A, X \cap B) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

3. Quand f est bijective, déterminer f^{-1} .

Exercice 20. Soit A une partie d'un ensemble E . On pose

$$\begin{aligned} \chi_A : E &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{F}(E, \{0, 1\}) \\ A &\longmapsto \chi_A \end{aligned}$$

est bijective.

Exercice 21. Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.

Exercice 22. Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Justifier que pour toutes parties A et B de E , $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2, \quad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Exercice 23. Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application. Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout ensemble G et toutes applications $g : F \longrightarrow G$ et $h : F \longrightarrow G$, on a l'implication :

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h$$

Exercice 24 (Théorème de Cantor). Soit E un ensemble. On souhaite démontrer qu'il n'y a pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.

1. Soit $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$. Posons $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$. En raisonnant par l'absurde, montrer que

$$\forall x \in E, \quad f(x) \neq A.$$

2. Conclure.

Exercice 25. On considère les applications :

$$\begin{aligned} f : \mathbf{N} &\longrightarrow \mathbf{N} & \text{et} & & g : \mathbf{N} &\longrightarrow \mathbf{N} \\ k &\longmapsto 2k & & & k &\longmapsto \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ (k-1)/2 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

1. Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et de g .
2. Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$. Etudier leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

Exercice 26. Soit $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Z}$.

$$n \longmapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -(n+1)/2 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Justifier que f est bien définie (ce qui signifie que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \in \mathbf{Z}$ ici).
2. Montrer que f est bijective.

Exercice 27. Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application. Montrer que :

1. f est injective si et seulement si pour toute partie A de E , $A = f^{-1}(f(A))$.
2. f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F , $f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 28. Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application surjective. On pose, pour tout $i \in F$, $A_i = f^{-1}(\{i\})$. Montrer que les A_i sont non vides, deux à deux disjoints et de réunion égale à E .

Exercice 29. Soit $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. On pose $\varphi : \mathbf{R}^D \longrightarrow \mathbf{R}^D$.

$$f \longmapsto f \circ \tan$$

1. Montrer que φ est injective.
2. φ est-elle bijective ?

Exercice 30. Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 31. On considère l'application $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$.
 $(x, y, z) \longmapsto (2x + y - z, x + 2y + z)$

1. La fonction f est-elle injective ? surjective ? Si f est bijective, déterminer f^{-1} .
2. Déterminer $f(\mathbf{R}^3)$.

Exercice 32. On considère l'application $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$.
 $(x, y) \longmapsto (x + y, 3x - y, 2x + y)$

1. La fonction f est-elle injective ? surjective ? Si f est bijective, déterminer f^{-1} .
2. Déterminer $f(\mathbf{R}^2)$.