
Colles - planche 06

Thèmes abordés : ensembles finis et dénombrement, nombres réels.

1 Questions de cours

Question de cours. Soient E et F deux ensembles finis non vides, de cardinaux respectifs n et p .

1. Donner $\text{Card}(\mathcal{F}(E, F))$.
2. Donner le nombre d'applications injectives de E dans F .

Question de cours. Donner une preuve combinatoire de la formule de Pascal.

- Question de cours.**
1. Définir la notion de partie convexe.
 2. Montrer que si A est une partie convexe non vide, minorée et non majorée, alors

$$]\inf(A); +\infty[\subset A \subset [\inf(A); +\infty[.$$

Question de cours. Démontrer que la limite d'une suite convergente réelle est unique.

Question de cours. Soit A et B deux parties de $\mathbf{R}$ non vides telles que $A \subset B$. Montrer que si B est majorée, alors A aussi et comparer $\sup(A)$ et $\sup(B)$.

2 Borne supérieure

Exercice 1. Déterminer (s'ils existent) : les majorants, minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants : ○ ○ ○

$$[0, 1] \cap \mathbf{Q}, \quad]0, 1[\cap \mathbf{Q}, \quad \mathbf{N}, \quad \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbf{N}^* \right\}.$$

Exercice 2. Soit $f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 4}$. Déterminer $\sup_{\mathbf{R}} f$ et $\inf_{\mathbf{R}} f$. ○ ○ ○

Exercice 3. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure (si elles existent) de $A = \{u_n, n \in \mathbf{N}\}$ avec $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon. ○ ○ ○

Exercice 4. Soit $X = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} : (p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2 \right\}$. ○ ○ ○

1. Montrer que X est majorée et minorée.
2. Quel théorème assure que X possède une borne supérieure ? une borne inférieure ?
3. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de X .

Exercice 5. Soit $X = \left\{ \frac{x+1}{x+2} : x \in]-\infty; 3] \right\}$.

1. Etudier la fonction $f : x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$ sur $]-\infty; 3]$.
2. En déduire la borne supérieure et la borne inférieure de X .

Exercice 6. Soit $A = \{x^2 + y^2 \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2, xy = 1\}$. ○○○

1. Montrer que A possède une borne inférieure que l'on déterminera.
2. La partie A possède-t-elle une borne supérieure?

Exercice 7. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $B = \{0, 101; 0, 1001; 0, 10001; \dots\}$ l'ensemble des décimaux qui s'écrivent sous la forme $0, 10 \dots 01$ avec n zéros entre les 1. ●○○

1. Montrer que B est une partie majorée et minorée de $\mathbf{R}$.
2. Déterminer la borne supérieure de B .
3. Déterminer la borne inférieure de B .

Exercice 8. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbf{R}_+$ non vides. On note ●○○

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}.$$

1. Démontrer que $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$.
2. Le résultat précédent est-il encore vrai si A et B sont des parties quelconques de $\mathbf{R}$?

Exercice 9. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. ●○○

1. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$. Exprimer $\sum_{k=1}^n (1 - a_k)^2$ en fonction de $\sum_{k=1}^n a_k$ et $\sum_{k=1}^n a_k^2$.
2. On note

$$E_n = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid \exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n, x = \sum_{k=1}^n a_k \text{ et } x = \sum_{k=1}^n a_k^2 \right\}.$$

- (a) L'ensemble E_n est-il minoré? Admet-il un plus petit élément?
- (b) L'ensemble E_n est-il majoré? Admet-il un plus grand élément?

Exercice 10. 1. Soit A et B deux parties de $\mathbf{R}$. On suppose $A \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$. ●○○

2. En considérant $A = [0; 1] \cap \mathbf{Q}$ et $B = ([0; 1] \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})) \cup \{0\}$, montrer que l'inégalité précédente n'est pas une égalité.
3. Soit A et B deux parties non vides de $\mathbf{R}$. Montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

Exercice 11. 1. En étudiant les variations de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$, établir que pour tout $x \geq -1$, $\ln(1+x) \leq x$. ●●○

2. Soit $A = \left\{ \left(\frac{m+n+1}{m+n} \right)^{m+n} : (m, n) \in (\mathbf{N}^*)^2 \right\}$. Déduire de la question 1. que A est une partie majorée de $\mathbf{R}$.

3. Rappeler la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.
4. Déterminer $\sup(A)$.

3 Partie entière

Exercice 12. Résoudre $[2x - 1] = [x - 4]$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

○○○

Exercice 13. Résoudre $[2x + 3] = [x + 2]$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

○○○

Exercice 14. Montrer que pour tout couple (x, y) de réels,

●○○

$$[x] + [x + y] + [y] \leq [2x] + [2y].$$

Exercice 15. Montrer que pour x réel et $n \in \mathbf{N}^*$, $\left\lfloor \frac{[nx]}{n} \right\rfloor = [x]$.

●○○

Exercice 16. Soit $x \in \mathbf{R}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = \frac{[x] + [2x] + \cdots + [nx]}{n^2}$.

●○○

1. Donner un encadrement de $n^2 u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge et donner sa limite.
3. En déduire que $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$ (cela signifie que pour tout réel x , il existe une suite de rationnels $(q_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge vers x).

Exercice 17. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

●○○

1. Montrer que $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier pair.
2. En déduire que la partie entière de $(2 + \sqrt{3})^n$ est un entier impair.

Exercice 18. Soit $(x, y) \in (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z})^2$ avec $x + y \in \mathbf{Z}$. Montrer qu'on a

●○○

$$[x] + [y] = x + y - 1.$$

Exercice 19. Soit $n \in \mathbf{N}$.

●○○

1. Justifier que $2\sqrt{n(n+1)} \in [2n; 2n+1[$.
2. Montrer que $\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \rfloor = 4n + 1$.

Exercice 20. 1. Montrer que l'application $f : x \mapsto [2x] - 2[x]$ prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1\}$.

●○○

2. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $[x] + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = [2x]$.

Exercice 21. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

●○○

$$[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1.$$

Exercice 22. Soit $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $\sum_{k=0}^{b-1} \left\lfloor \frac{a+k}{b} \right\rfloor = a$.

●●○

4 Dénombrement

Exercice 23. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Combien y-a-t-il de surjections de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$?

○○○

Exercice 24. Un digicode est composé de quatre caractères pris parmi dix chiffres et deux lettres. Combien peut-on former de :

○○○

1. digicodes ?
2. digicodes à caractères distincts ?
3. digicodes contenant exactement un 7 ?
4. digicodes à caractères distincts et contenant un 7 ?
5. digicodes contenant au moins un chiffre ?
6. de digicodes à caractères distincts et contenant au moins un chiffre ?
7. de digicode à caractère distincts contenant au moins une lettre ?

Exercice 25. Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10. La boule 1 est jaune, les boules 2 et 3 sont bleues, les boules 4, 5 et 6 sont rouges et les boules restantes sont vertes. On tire dans l'urne, successivement et avec remise, 5 boules. On appelle résultat la liste ordonnée des cinq numéros des boules tirées. Par exemple, un résultat possible est (3, 7, 10, 3, 6). Déterminer le nombre de résultats :

●○○

- (a) en tout ;
- (b) pour lesquels les cinq boules sont toutes de la même couleur ;
- (c) pour lesquels les quatre couleurs apparaissent parmi les cinq boules ;
- (d) pour lesquels la boule numéro 8 a été tirée et exactement deux des boules tirées sont rouges.

Exercice 26. On pioche huit cartes (une « main ») dans un jeu de 32 cartes. Combien peut-on former :

●○○

1. de mains ?
2. de mains contenant trois piques exactement ?
3. de mains contenant au moins trois piques ?
4. de mains contenant au moins un roi et au moins un pique ?

Exercice 27. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. En utilisant une preuve combinatoire, montrer que

●○○

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

On pourra utiliser une partition d'un ensemble à $2n$ éléments en deux parties de n éléments.

Exercice 28 (Formule du capitaine). Soit $n \in \mathbf{N}^*$, soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En utilisant une preuve combinatoire, montrer que

●○○

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

Pour établir cette formule, on pourra résoudre de deux manières le problème suivant : « de combien de manières peut-on former, à partir de n personnes, une équipe de p d'entre elles dont un capitaine ? ».

Exercice 29. 1. Combien un entier de la forme $p_1 \dots p_r$, avec les p_i des premiers distincts (où $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $r \in \mathbf{N}^*$) possède-t-il de diviseurs ?

●○○

2. On reprend les notations précédentes. Combien un entier de la forme $p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$ (avec $m_i \in \mathbf{N}^*$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$) possède-t-il de diviseurs ?

Exercice 30. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbf{N}^*$.

• • •

1. Pour tout $p \leq n$, on note $Q_p = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid \text{Card}(A) = p\}$. Soit $p \leq n$.
 - (a) Montrer que l'application $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ est bijective.
$$A \longmapsto \overline{A}$$
 - (b) Quel est le cardinal de Q_p ?
 - (c) En calculant de deux manières différentes $f(Q_p)$, établir une formule sur les coefficients binomiaux.
2. On suppose $n \geq 2$. Montrer que
$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}.$$

Exercice 31. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit E un ensemble à n éléments.

• • •

1. Déterminer le nombre de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y = \emptyset$.
2. Déterminer le nombre de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cup Y = E$.
3. Déterminer le nombre de couples (X, Y) de parties de E tels que (X, Y) forme une partition de E .
4. Déterminer le nombre de triplets (X, Y, Z) de parties de E tels que $X \cup Y = Z$.

Exercice 32. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer le cardinal des ensembles suivants :

• • •

1. $A = \{(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2 \mid i < j\}$;
2. $B = \{(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2 \mid i > j\}$;
3. $C = \{(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2 \mid i \leq j\}$;
4. $D = \{(i, j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^3 \mid i < j < k\}$.

Exercice 33. Soit n un entier naturel et $x \in \mathbf{R}_+$.

• • •

1. Combien y a-t-il d'entiers naturels entre 0 et n ? entre 0 et x ?
2. Combien y a-t-il d'entiers naturels pairs entre 0 et x ?
3. Combien l'équation $x + 2y = n$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{N}^2$ a-t-elle de couples solutions ?
4. De combien de façon peut-on payer 10 euros avec des pièces de 10 et 20 centimes d'euros ?

Exercice 34. On trace les cordes d'un cercle $\mathcal{C}$ joignant deux à deux n points distincts $A_1, \dots, A_n$ de $\mathcal{C}$. On suppose que trois de ces cordes ne sont jamais concourantes. En combien de points intérieurs au cercle se coupent-elles ?

• • •