
Colles - planche 07

Thèmes abordés : suites.

1 Questions de cours

Question de cours. Montrer, à l'aide des définitions, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 2n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2.$$

Question de cours. Montrer que si une suite réelle u tend vers $-\infty$ ou vers un réel $\ell < 0$, alors $u_n < 0$ au delà d'un certain rang.

Question de cours. Soient u et v deux suites réelles convergentes de limites respectives ℓ et ℓ' . On suppose que pour tout entier naturel n , $u_n \leq v_n$. Montrer que $\ell \leq \ell'$. Peut-on préciser cette proposition avec des inégalités strictes ?

Question de cours. Soit u une suite réelle. Que peut-on affirmer si les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ? Démontrer ce résultat.

Question de cours. A l'aide du théorème de la limite monotone, montrer la convergence de la suite de terme général $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

Question de cours. 1. Donner les équivalents usuels.

2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

3. Donner un équivalent simple de $\ln(\sin(e^{-n}))$.

Question de cours. Énoncer le théorème de la limite monotone et démontrer ce théorème dans le cas d'une suite croissante.

2 Généralités

Exercice 1. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_n = \sum_{k=0}^n k^5$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^7} = 0$. ◦ ◦ ◦

3 Suites linéaires récurrentes d'ordre 2

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et ◦ ◦ ◦

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{2u_{n+1}u_n}{u_{n+1} + u_n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, et déterminer le terme général de cette suite.
3. Exprimer u_n en fonction de n , puis étudier la convergence de la suite.

Exercice 3. Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1 + 4i$ et

$$u_{n+2} = (3 - 2i)u_{n+1} - (5 - 5i)u_n.$$

Exercice 4. Soit $\theta \in]0, \pi[$. Déterminer le terme général de la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0.$$

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = (u_{n+1}u_n^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Exprimer u_n en fonction de n puis étudier la convergence de la suite.

Exercice 6. 1. Soit $f : \mathbf{R}^{+\star} \longrightarrow \mathbf{R}^{+\star}$ une fonction quelconque et $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose de plus que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0.$$

Déterminer le terme général de cette suite.

2. Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R}^{+\star} \longrightarrow \mathbf{R}^{+\star}$ vérifiant :

$$\forall x > 0, \quad f(f(x)) + f(x) = 2x.$$

Exercice 7. Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R}^{+\star} \longrightarrow \mathbf{R}^{+\star}$ vérifiant :

$$\forall x > 0, \quad f(f(x)) = 6x - f(x).$$

4 Suites arithmético-géométriques

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ les suites déterminées par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est constante.
2. Prouver que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3. Exprimer les termes généraux des suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Exercice 9. On considère la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11 \dots 11}_{n \text{ fois}}.$$

Déterminer, si elle existe, la limite de $\left(\frac{u_n}{10^n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$.

Exercice 10. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite satisfaisant :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = an^2 + bn.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est arithmétique et donner son terme général.

5 Suites adjacentes

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on pose :

◦ ◦ ◦

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergent vers la même limite.

Exercice 12. 1. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ par $u_n =$ ◦ ◦ ◦

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$$
 sont adjacentes.

2. Montrer la limite commune de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est irrationnelle.

Exercice 13. Soit $(u_0, v_0) \in (\mathbf{R}^{+*})^2$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

◦ ◦ ◦

$$\frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 14. Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $u_n = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ et $v_n = 2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$. Montrer ◦ ◦ ◦
que les suites u et v sont adjacentes. Quelle est leur limite commune?

Exercice 15. Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ définies pour tout $n \geq 2$ par :

◦ ◦ ◦

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}$$

sont convergentes.

Exercice 16. Soit $(u_0, v_0, \lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \times (\mathbf{R}^+)^2$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

• ◦ ◦

$$u_{n+1} = \frac{u_n + \lambda v_n}{1 + \lambda} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + \mu v_n}{1 + \mu}.$$

Déterminer la condition pour que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ soient adjacentes.

Exercice 17. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$. Montrer que la suite ◦ ◦ ◦
 $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge et que sa limite est irrationnelle.

6 Théorèmes d'existence (encadrement, majoration, minoration, limite monotone)

Exercice 18. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

◦ ◦ ◦

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que, pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

2. Montrer que u converge vers $\ln(2)$.

Exercice 19. 1. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $1 \leq \binom{n}{k} \leq 2^n$. ◦ ◦ ◦

2. Etudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \left(\prod_{k=0}^n \binom{n}{k} \right)^{\frac{1}{n^3}}.$$

Exercice 20. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose ● ◦ ◦

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge (on ne demande pas sa limite).

Exercice 21. Soient $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ à valeurs dans $[0, 1]$ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 1$. Démontrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergent et donner leurs limites. ● ◦ ◦

Exercice 22. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} ([x] + [2x] + \cdots + [nx])$. ● ◦ ◦

Exercice 23. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite bornée telle que, ● ● ◦

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 2u_n \leq u_{n-1} + u_{n+1}.$$

Montrer que cette suite est convergente.

Exercice 24. Soient a et b deux réels, $a < b$. On considère la fonction $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ supposée continue et une suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_0 \in [a, b]$ et : ● ● ◦

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. On suppose que f est croissante. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est monotone et en déduire sa convergence vers une solution de l'équation $f(x) = x$.
2. *Application.* Calculer la limite de la suite définie par $u_0 = 4$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \frac{4u_n + 5}{u_n + 3}.$$

7 Relations de comparaison

Exercice 25. 1. On pose pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = n \ln \left(1 - \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1} \right)$. Donner un équivalent de $(u_n)_{n \geq 2}$ et préciser la limite de cette suite. ◦ ◦ ◦

2. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = e^{\sin(e^{-n})} - 1$. Donner un équivalent de $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et préciser la limite de cette suite.

Exercice 26. 1. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \frac{1 - \cos\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)}{1 - \cos\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)}$. Donner un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et préciser la limite de cette suite.

2. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $v_n = \frac{1 - \sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}}{1 - \sqrt{\cos\left(\frac{2}{n}\right)}}$. Donner un équivalent de $(v_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et préciser la limite de cette suite.

Exercice 27. 1. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 3^n \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Donner un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et préciser la limite de cette suite.

2. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = \frac{\sqrt{1 + e^{-n}} - 1}{\ln(1 + \frac{1}{2^n})}$. Donner un équivalent de $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et préciser la limite de cette suite.

Exercice 28. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} - 2}{\sqrt{(1 + \frac{1}{n})^3 - 1}}$. Donner un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$.

Exercice 29. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\right)^{\frac{n}{2}}$. Donner un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Exercice 30. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = n \tan\left(\frac{\pi n}{2n + 1}\right)$. Donner un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Exercice 31. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = e^{\sqrt{n+1}} - e^{\sqrt{n}}$. Montrer que $u_n \sim \frac{e^{\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}$ et en déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Exercice 32. 1. Justifier que pour tout k entier supérieur ou égal à 2,

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrer qu'il existe une constante K , que l'on déterminera, telle que $S_n \sim K\sqrt{n}$.

Exercice 33. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante vérifiant $u_n + u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Montrer que la suite converge nécessairement vers 0 et en donner un équivalent simple. • ◦ ◦

Exercice 34. Soit $x > 0$. On définit une suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $u_1 = x$ et $u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{n + u_n^2}$ pour tout $n \geq 1$. • ◦ ◦

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n > 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $u_n \geq 1$, alors $u_{n+1} \leq 1$, et que si $u_n \leq 1$, alors $u_{n+1} \leq \frac{2}{n}$.
3. En déduire que pour tout entier $n \geq 3$, $u_n \leq \frac{2}{n-1}$.
4. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
5. Donner un équivalent simple de u .
6. On pose $v_n = nu_n - 1$ pour tout entier $n \geq 1$. On admettra que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{2n^2 + n^2 v_n + n + n v_n - v_n^2 - 2v_n - 1}{n^3 + v_n^2 + 2v_n + 1}.$$

En déduire un équivalent simple de v .

7. Donner un développement asymptotique à deux termes de u (autrement dit, déterminer un polynôme P de degré 2 tel que $u_n = P\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$).

Exercice 35. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie • ◦ ◦

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{a_n} = e^2.$$

Déterminer un équivalent de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2a_n}{n+1}$.

Exercice 36. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 2$, $u_4 = u_5 = u_6 = 3$... c'est-à-dire la suite obtenue en prenant une fois la valeur 1, deux fois la valeur 2, trois fois la valeur 3... et de façon générale k fois la valeur k , pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. • • ◦

1. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Calculer u_j pour $j = 1 + \sum_{k=1}^{r-1} k$ et $j = \sum_{k=1}^r k$.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $r \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sum_{k=1}^{r-1} k < n \leq \sum_{k=1}^r k.$$

Indication : on pourra commencer par montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble A_n admet une borne supérieure.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(u_n - 1) \leq 2n \leq u_n(u_n + 1)$.
4. Déterminer un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

8 Suites définies implicitement

Exercice 37. Montrer que la relation $nu_n^{n+1} - (n+1)u_n^n = 1$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) définit une suite positive $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unique. • ◦ ◦
Etudier sa convergence et préciser sa limite.

Exercice 38. On considère, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$ définie sur $\mathbf{R}$. • ○ ○

1. Etudier les variations de f_n .
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
3. Montrer que $u_n \leq \frac{1}{n}$ et en déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
4. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Exercice 39. 1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par • ○ ○

$$x \mapsto x^n + x - 1$$

- admet un unique zéro positif, noté a_n .
2. Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Exercice 40. 1. Montrer que l'équation $xe^x = n$ possède pour tout $n \in \mathbf{N}$ une unique solution x_n dans $\mathbf{R}^+$. • ○ ○

2. Étudier la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Exercice 41. Soit $n \geq 0$ et $P_n : x \mapsto x^2 + (n-1)x - (n+1)$. • • ○

1. Justifier que l'équation $P_n(x) = 0$ d'inconnue réelle x admet deux solutions, dont l'une est positive. On notera x_n cette solution.
2. Montrer que $1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \leq x_n \leq 1 + \frac{1}{n}$ et en déduire la limite de $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

9 Suites extraites

Exercice 42. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle telle que : ○ ○ ○

$$\forall (n, p) \in (\mathbf{N}^*)^2, \quad 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}.$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers 0.

Exercice 43. Pour $x \in \mathbf{R}$, on note $\{x\} = x - [x]$ la partie fractionnaire de x . Montrer que la suite $(\{\sqrt{n}\})_{n \in \mathbf{N}}$ n'admet pas de limite. • ○ ○

10 Suites à valeurs complexes

Exercice 44. On pose $z_n = \exp(i \ln n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ diverge. ○ ○ ○