
Colles - planche 08

Thèmes abordés : suites récurrentes, systèmes linéaires.

1 Suites définies par récurrence

Exercice 1. Soit $u_0 \in \mathbf{R}$. On définit une suite u en posant, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. ○○○
Etudier cette suite.

Exercice 2. Soit $u_0 \in \mathbf{R}^{+*}$. On définit une suite u en posant, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{1 + u_n^2}$. ○○○
Etudier cette suite.

Exercice 3. Soit $u_0 \in \mathbf{R}^{+*}$. On définit une suite u en posant, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n}$. ○○○
Etudier cette suite.

Exercice 4 (Suite de Héron). Soit $(u_0, a) \in (\mathbf{R}^{+*})^2$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$. ○○○
Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Exercice 5. Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{8 + \frac{u_n^2}{2}}$. ○○○

Exercice 6. Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$. ○○○

Exercice 7. Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n(1 + u_n)$. ●○○

Exercice 8. Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbf{R}^+$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35}$. ●○○

Exercice 9. Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1 + u_n}{1 + 2u_n}$. ●○○

Exercice 10. Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_0 \neq 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{1 + u_n^2}{u_n - 1}$. ●○○

●○○

Exercice 11. Montrer qu'il n'existe pas de suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ strictement positive telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n}.$$

Exercice 12. Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 2 + \ln u_n$ (on déterminera en particulier pour quelles valeurs de u_0 la suite est correctement définie). ••○

Exercice 13. On considère les suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définies par leurs premiers termes respectifs a_0 et b_0 strictement positifs et les relations : ••○

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad a_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1} \quad \text{et} \quad b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$.
On pose dorénavant, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \frac{a_n}{b_n}$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{3 - u_n^2}{u_n + 2} = \frac{(\sqrt{3} - u_n)(\sqrt{3} + u_n)}{u_n + 2}$.
3. Résoudre l'équation $\frac{2x+3}{x+2} = x$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}^{+*}$.
4. Etudier la convergence et l'éventuelle limite de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Exercice 14. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle vérifiant : ••○

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right].$$

Soit $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite déterminée par :

$$v_0 = u_0, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n + u_{n+1}}{1 + u_{n+1}v_n}.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 15. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 2$, $u_4 = u_5 = u_6 = 3$... c'est-à-dire la suite obtenue en prenant une fois la valeur 1, deux fois la valeur 2, trois fois la valeur 3... et de façon générale k fois la valeur k , pour tout $k \in \mathbf{N}^*$. ••○

1. Soit $r \in \mathbf{N}^*$. Calculer u_j pour $j = 1 + \sum_{k=1}^{r-1} k$ et $j = \sum_{k=1}^r k$.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe un unique $r \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\sum_{k=1}^{r-1} k < n \leq \sum_{k=1}^r k.$$

Indication : on pourra commencer par montrer que, pour $n \in \mathbf{N}^*$, l'ensemble A_n admet une borne supérieure.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n(u_n - 1) \leq 2n \leq u_n(u_n + 1)$.
4. Déterminer un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

2 Systèmes linéaires

Exercice 16. Résoudre le système $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. ○○○

Exercice 17. Soit $a \in \mathbf{R}$. Résoudre le système $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x - y = a \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. ○○○

Exercice 18. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Résoudre le système $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + ay + z = b \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. ○○○

Exercice 19. L'objectif de cet exercice est de déterminer trois réels α , β et γ tels que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 2, on ait ○○○

$$\int_2^4 P(t) dt = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4). \quad (\star)$$

1. Supposons qu'il existe (α, β, γ) tel que tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 vérifie $(\star)$.

(a) Donner la valeur de $\int_2^4 x^2 dx$, puis exprimer $\int_2^4 x^2 dx$ en fonction de α , β et γ .

(b) Reprendre la question précédente avec $\int_2^4 x dx$, puis avec $\int_2^4 dx$.

(c) Résoudre le système $\begin{cases} 4\alpha + 9\beta + 16\gamma = \frac{56}{3} \\ 2\alpha + 3\beta + 4\gamma = 6 \\ \alpha + \beta + \gamma = 2 \end{cases}$.

2. Conclure.

Exercice 20. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Résoudre le système $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. ●○○

Exercice 21. Trouver trois réels α , β et γ tels que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 2, on ait : ●○○

$$\int_2^4 P(t) dt = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4).$$

Exercice 22. Soit $(a, b) \in \mathbf{C}^2$. Résoudre le système suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{C}^3$: ●○○

$$\begin{cases} ax + 2by + 2z = 1 \\ 2x + aby + 2z = b \\ 2x + 2by + az = 1 \end{cases}$$

●○○

Exercice 23. Problème des boeufs de Newton

Sachant que soixante-quinze boeufs ont brouté en douze jours l'herbe d'un pré de soixante ares et que quatre-vingt-un boeufs ont broutés en quinze jours l'herbe d'un pré de de soixante-douze ares, combien faut-il de boeufs pour brouter en dix-huit jours l'herbe d'un pré de quatre-vingt-seize ares ?

On suppose que, dans les trois prés, l'herbe est à la même hauteur au moment de l'entrée des boeufs et qu'elle continue de croître uniformément après leur entrée. On suppose également que les boeufs broutent à un rythme constant.

Exercice 24. Trouver des réels a , b et c tels que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x^2 - 6x + 5$ s'écrive sous la forme $x \mapsto ax + bx(x-1) + cx(x-1)(x-2)$. Y a-t-il plusieurs choix possibles pour a , b et c ? • ◦ ◦

Exercice 25. Trouver des réels a , b et c tels que la fonction • ◦ ◦

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

s'écrive sous la forme

$$x \longmapsto \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}.$$

En déduire une primitive de f . Y a-t-il plusieurs choix possibles pour a , b et c ?

Exercice 26. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $f : x \longmapsto ae^x + bx + c$. On suppose que le graphe de f contient le point de coordonnées $(0, 1)$ et que sa tangente en ce point contient également le point de coordonnées $(2, 3)$. On suppose enfin que le graphe de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\ln(3)$. Déterminer a , b et c . • ◦ ◦