
Colles - planche 09

Thèmes abordés : systèmes linéaires, matrices.

1 Questions de cours

Question de cours. Montrer que toute matrice carrée se décompose de manière unique en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Question de cours. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton pour les matrices.

Question de cours. 1. Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices (la démonstration n'est pas demandée).

2. On considère $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Question de cours. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$. Montrer que ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.

Question de cours. 1. Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Soit $\lambda \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$. Montrer que les matrices A^{-1} , AB , tA et λA sont inversibles et déterminer leur inverse.

2. Inverser, si possible, la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Question de cours. Inverser, si possible, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Question de cours. 1. Définir les notions d'application injective, surjective.

2. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbf{R}^3 &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + 3y + 2z, x + 4y + z, y - z) \end{aligned}$$

3. L'application f est-elle injective ? surjective ? Si possible, exprimer $f(\mathbf{R}^3)$ sous forme d'un ensemble décrit par équation(s).

2 Généralités sur les matrices

Exercice 1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

○ ○ ○

1. Déterminer toutes les matrices B dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $AB = 0$.

2. Déterminer toutes les matrices C dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $AC = CA = 0$.

● ● ○

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $P^{-1}AP$. On notera M le résultat obtenu.
2. Déterminer une matrice N telle que $N^2 = A$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice inversible vérifiant $A + A^{-1} = I_n$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on pose $B_k = A^k + A^{-k}$. ••○

1. Soit $k \in \mathbf{N}$. Exprimer B_{k+1} en fonction de B_k et B_{k-1} .
2. Calculer B_k pour tout $k \in \mathbf{N}$.

3 Puissances de matrice

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$. ○○○

1. Calculer B^2, B^3 .
2. En déduire A^n , pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites réelles vérifiant, pour tout $n \in \mathbf{N}$, •○○

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 5u_n - 4v_n \\ v_{n+1} &= 4u_n - 3v_n \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Notons $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. En remarquant que $A = 4B + I_2$, calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. En déduire les valeurs de u_n et v_n en fonction des valeurs initiales u_0 et v_0 , pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 6. On considère les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définies par $u_0 = 0, v_0 = 0$ et : •○○

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = au_n + \alpha b^n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = bv_n + \alpha a^n,$$

où a, b et α sont des complexes. On considère aussi $M = \begin{pmatrix} a & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que $a \neq b$. Montrer que $M^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & 0 & v_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}$. En déduire les expressions de u_n et de v_n en fonction de n .
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que $a = b$. Calculer M^n et en déduire les expressions de u_n et de v_n en fonction de n .

Exercice 7. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1. •○○

1. Calculer J^2, J^3 .

2. Soit $k \in \mathbf{N}$. Donner une expression simple de J^k .
3. Soit $k \in \mathbf{N}$. Calculer A^k , où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. On pose $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer N^2 . En déduire la valeur de N^n , pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Déterminer la valeur de D^n , pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. En déduire la valeur de A^n , pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 9. Déterminer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^3 = 6A - A^2$.
2. Montrer qu'il existe deux suites $(a_k)_{k \geq 2}$ et $(b_k)_{k \geq 2}$ telles que, pour tout $k \geq 2$, $A^k = a_k A^2 + b_k A$.
3. En déduire l'expression de A^k , pour $k \geq 2$.

Exercice 11. Une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ est dite stochastique si tous ses coefficients sont positifs et si, en notant $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$, pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $\sum_{j=1}^3 a_{i,j} = 1$.

On considérera ici qu'une suite de matrices $(A_p)_{p \in \mathbf{N}}$ converge vers la matrice A si $\lim_{p \rightarrow +\infty} (A_p)_{i,j} = a_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$.

On considère les matrices $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les puissances de la matrice J .
2. Ecrire B comme combinaison linéaire des matrices I_3 et J , et en déduire les puissances de la matrice B .
3. Montrer que la suite $(B^n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge, et que sa limite est une matrice stochastique.

4 Inverse de matrice

Exercice 12. 1. Soit A une matrice. On suppose qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $A^{k+1} = 0$. Montrer que $I - A$ est inversible et que son inverse est $I + A + A^2 + \dots + A^k$.

2. En déduire l'inverse de $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (sans utiliser le pivot de Gauss).

Exercice 13. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme de degré 2 annulant A .
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse (sans faire le pivot de Gauss).

Exercice 14. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. • ○ ○

1. Montrer que P est inversible.
2. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire les puissances de la matrice A .

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. • ○ ○

1. Calculer $(A + I_3)^3$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} (sans utiliser le pivot de Gauss).

Exercice 16. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $B^k = 0$. • ○ ○

1. Justifier que $I + B$ est inversible, et donner son inverse.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tel que $AB = BA$. Démontrer que A est inversible si et seulement si $A + B$ est inversible.

Exercice 17. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A_n = (\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$. Montrer que A_n est inversible et calculer son inverse. • • ○

Exercice 18. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. • • ○

1. On suppose $b = 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour A soit inversible. Lorsque A est inversible, calculer A^{-1} .
2. On suppose $b \neq 0$. On pose $J \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.
 - (a) Déterminer α et β deux nombres complexes tels que $A = \alpha I + \beta J$.
 - (b) Calculer A^2 .
 - (c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour A soit inversible, et calculer A^{-1} lorsque c'est possible.

Exercice 19. On considère l'application $M : \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}.$$
 • • ○

1. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $M(a)M(b) = M(a + b - 3ab)$.
2. Soit $a \in \mathbf{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $M(a)$ soit inversible.
3. Soit $a \in \mathbf{R}$. Trouver une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $M(a)^n = M(u_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 20. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbf{C}^4$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $(x, y) \in \mathbf{C}^2$ tel que $A^2 + xA + yI = 0$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c, d) \in \mathbf{C}^4$ pour que A soit inversible. Déterminer, lorsque c'est possible, A^{-1} .