
Colles - planche 10

Thèmes abordés : limites de fonction, continuité.

1 Questions de cours

Question de cours. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème de l'image d'un segment par une fonction continue et le théorème de la bijection.

Question de cours. Soit f une fonction périodique définie sur $\mathbf{R}$ admettant une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Question de cours. Soit f une fonction numérique définie et continue sur $\mathbf{R}$, admettant des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbf{R}$.

Question de cours. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ et continue en 0. On suppose que $f(2x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer que f est constante.

Question de cours. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a; b])$ vérifiant $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$. Montrer de manière constructive que f admet au moins un zéro sur $[a; b]$.

2 Calcul de limites

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

○○○

a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \ln(x) \ln(\ln(x)) ;$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\operatorname{Arccos}(x)} ;$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :

○○○

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(e^x)}{x^2 + 1} ;$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} ;$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin(x) + 1)}{e^{\tan x} - 1}.$

Exercice 3. Calculer les limites suivantes :

○○○

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \ln(1+x^2)}{x \tan(x)} ;$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(e+x)^{\frac{1}{x}}.$

Exercice 4. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une application telle que :

○○○

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)(1-f(x)) = \frac{1}{4}.$$

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}.$

Exercice 5. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une application telle que :

○○○

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)(2 - f(x)) = 1.$$

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Exercice 6. Montrer que la fonction :

○○○

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto x - [x] \end{aligned}$$

n'a pas de limite, ni finie ni infinie, en $+\infty$.

Exercice 7. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - [x]}{x + [x]}$.

○○○

Exercice 8. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ une fonction décroissante telle que

●●○

$$f(x) + f(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

1. Étudier la limite de f en $+\infty$.
2. Donner un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.

3 Continuité

Exercice 9. Etudier la continuité sur $\mathbf{R}$ de $f : x \longmapsto [x] + \sqrt{x - [x]}$.

○○○

Exercice 10. L'application

○○○

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto (x - [x])^2 + ([x] + 1 - x)^2 \end{aligned}$$

est-elle continue sur $\mathbf{R}$?

Exercice 11. Soit $f : x \longmapsto (x(\ln x)^2 + 1)^{\frac{1}{\ln(x)}}$.

●●○

1. Montrer que f est définie sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
2. Montrer (avec soin) que f est continue sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et en 1.
4. Etudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction à la fois 1-périodique et $\sqrt{2}$ -périodique. On suppose de plus que f est continue en 0.

●●○

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $(\sqrt{2} - 1)^n$ est une période de f .
2. Montrer que f est constante.
3. On ne suppose plus f continue en 0. A-t-on nécessairement f constante?

4 Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 13. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, périodique de période $T > 0$. On pose

○○○

$$g : t \mapsto f(t) - f\left(t + \frac{T}{2}\right).$$

1. Exprimer $g(\frac{T}{2})$ en fonction de $g(0)$.
2. Montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(t_0) = f(t_0 + \frac{T}{2})$.

Exercice 14. Soit f et g deux fonctions numériques définies et continues sur un intervalle I . On suppose que

○○○

$$|f| = |g|$$

et que f ne s'annule pas. Montrer que $f = g$ ou que $f = -g$.

Exercice 15. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose que $\lim_{+\infty} |f| = +\infty$. Montrer que $\lim_{+\infty} f = +\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = -\infty$.

○○○

Exercice 16. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continue. On suppose que f n'a pas de point fixe. Montrer que $f \circ f$ n'a pas de point fixe.

●○○

Exercice 17 (Théorèmes de point fixe). Les questions suivantes sont indépendantes les unes de autres.

●○○

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe.
2. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.
3. Soit $\ell < 1$ un nombre réel et $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue, positive et telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell.$$

Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 18. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ et $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions continues telles que $\begin{cases} f(0) = g(1) = 0 \\ f(1) = g(0) = 1 \end{cases}$. Montrer que :

●○○

$$\forall \lambda \geq 0, \quad \exists x_0 \in [0, 1], \quad f(x_0) = \lambda g(x_0).$$

Exercice 19. Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et injective. Montrer que f est strictement monotone.

●●○

Exercice 20. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$.

●●○

1. Montrer que la fonction $g : t \mapsto f\left(t + \frac{b-a}{2}\right) - f(t)$ s'annule au moins une fois sur $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$.
2. Une personne parcourt 4 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 minutes pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Exercice 21. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continue et 1-périodique. Montrer que :

●●○

$$\forall a \in]0, +\infty[, \exists c \in \mathbf{R}, \quad f(c+a) = f(c).$$

5 Fonction continue sur un segment

Exercice 22. Montrer que l'application :

◦ ◦ ◦

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{(x-1)^{10} + (x-2)^{12}} \end{aligned}$$

est majorée.

Exercice 23. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une application bornée, $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une application continue. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

◦ ◦ ◦

Exercice 24. Soit $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une application continue telle que

• • ◦

$$\forall x \in [0; 1], \quad f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 3f(x).$$

Montrer que $f = 0$.

Exercice 25. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une application continue telle que :

• • ◦

$$\forall x \in [0, 1], \quad f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 3f(x).$$

Montrer que $f = 0$.

Exercice 26. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f, g : [a; b] \longrightarrow \mathbf{R}$ continues telles que

• • ◦

$$\sup \{f(x) : x \in [a; b]\} = \sup \{g(x) : x \in [a; b]\}.$$

Montrer qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

6 Théorème de la bijection

Exercice 27. 1. Montrer que $g : [0; 1] \longrightarrow [0; 2]$ est bijective.

◦ ◦ ◦

$$y \longmapsto y^5 + y$$

2. Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in \mathcal{F}([0; 2], [0; 1])$ telle que

$$\forall x \in [0; 2], \quad f(x)^5 + f(x) = x.$$

3. Prouver que f est continue.

Exercice 28. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$.

• • ◦

$$x \longmapsto \frac{x}{1 + |x|}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur un ensemble F à déterminer.

2. Déterminer une expression de f^{-1} analogue à celle de f .

Exercice 29. 1. Soit E et F deux parties de $\mathbf{R}$ et $f : E \longrightarrow F$ une fonction continue non monotone.

• • ◦

(a) Justifier l'existence de $(a, b, c) \in E^3$ tels que $a < b < c$ et

$$(f(c) - f(b))(f(b) - f(a)) < 0.$$

(b) Démontrer que f n'est pas injective. On pourra considérer l'application

$$g : t \longmapsto (f(c) - f(b))(f(b + t(c - b)) - f(a + t(b - a))).$$

2. Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue vérifiant :

$$f \circ f = \text{Id}.$$

Déterminer f .

7 Utilisation d'un argument de densité

Exercice 30. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $f|_{\mathbf{Q}}$ soit croissante. Montrer que f est croissante. • ◦ ◦

8 Equations fonctionnelles

Exercice 31. Déterminer toutes les applications $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ continues en 0 et telles que : • • ◦

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$