
Colles - planche 11

Thèmes abordés : dérivabilité, probabilité.

1 Cours

Question de cours. Énoncer et démontrer la condition nécessaire d'extremum en un point intérieur. Énoncer le théorème de Rolle.

Question de cours. Énoncer le théorème de l'égalité des accroissements finis. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\frac{1}{x+1} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}$.

Question de cours. Donner la définition de la notion de fonction lipschitzienne. Énoncer et démontrer l'inégalité des accroissements finis.

2 Calculs de dérivées

Exercice 1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer la dérivée n -ième de $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$.
$$x \longmapsto \cos(x)^2 \sin(x)$$
 ○○○

Exercice 2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer la dérivée n -ième de $f : x \longmapsto x^2(1+x)^n$. ○○○

Exercice 3. Soit $n \in \mathbf{N}$. ○○○

1. Calculer la dérivée n -ième de $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$, puis de $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$.
2. Calculer la dérivée n -ième de $x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}$.

3 Dérivabilité

Exercice 4. Etudier la continuité, la dérivabilité, la continuité de la dérivée pour $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par : ○○○

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 5. Soit $f : \mathbf{R}^{+*} \longrightarrow \mathbf{R}$.
$$x \longmapsto x^x$$
 ○○○

1. Peut-on prolonger f par continuité sur $\mathbf{R}^+$?
 2. Le prolongement obtenu est-il dérivable sur $\mathbf{R}$?
-

Exercice 6. 1. Peut-on déterminer $a \in \mathbf{R}$ tel que

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^+ &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

soit dérivable sur $\mathbf{R}^{+\star}$?

2. Peut-on déterminer $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^+ &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

soit dérivable sur $\mathbf{R}^{+\star}$?

Exercice 7. On considère la fonction $f :]0, 1[\cup]1, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$.

$$x \longmapsto \frac{\ln(1+x^2) \ln(x)}{x-1}$$

1. Peut-on prolonger f en une fonction continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$?
2. Le prolongement obtenu est-il dérivable en 0 ?

4 Théorème de la limite de la dérivée

Exercice 8. On considère :

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$?

Exercice 9. On considère $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$.

$$x \longmapsto x - [x]$$

Etudier la dérivabilité de g définie sur $\mathbf{R}$ par $g : x \longmapsto h(x)(h(x) - 1)$.

5 Théorème de Rolle

Exercice 10. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a; b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On suppose de plus que pour tout $x \in]a; b[$, $f''(x) \leq 0$.

1. Justifier qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. En déduire le signe de f' sur $[a; b]$.
3. Déterminer le signe de f .

Exercice 11. Soit $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe C^1 , s'annulant en $-1, 0, 1$. On considère la fonction

$$\begin{aligned} g : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto 2x^4 + x + f(x) \end{aligned}$$

Montrer qu'il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $g'(c) = 0$.

Exercice 12. Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ tels que $\sum_{k=1}^n a_k = 0$.

Montrer que l'équation $\sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = 0$ admet au moins une solution $x \in]0, 1[$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une application de classe C^n s'annulant en $n + 1$ points distincts de I . • • ◦

1. Montrer que la dérivée n -ième de f s'annule au moins une fois sur I .
2. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que la dérivée $(n - 1)$ -ième de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois sur I .

Exercice 14. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable telle que • ◦ ◦

$$\lim_{-\infty} f = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} f = +\infty.$$

Montrer qu'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 15. Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable telle que : • • ◦

$$\lim_{+\infty} f = f(0).$$

Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 16. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable vérifiant • ◦ ◦

$$f(a) = 0, \quad f(b) = 0, \quad f'(a) > 0, \quad f'(b) > 0.$$

Montrer qu'il existe $(c_1, c_2, c_3) \in]a, b[^3$ tels que $c_1 < c_2 < c_3$ et

$$f'(c_1) = 0, \quad f(c_2) = 0, \quad f'(c_3) = 0.$$

Exercice 17 (Règle de l'Hospital). Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$, $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. • • ◦

1. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a))$.

2. En déduire que si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell$.

3. Application : déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\cos(x) - e^x}{(x + 1)e^x - 1}$.

Exercice 18. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$ et vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. Soit $d \in \mathbf{R} \setminus [a, b]$. Montrer qu'il existe une tangente à la courbe représentative de f passant par le point $(d, 0)$. • • ◦

Exercice 19. Soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Soit A et B deux points de sa courbe représentative $\mathcal{C}$, tels que B est sur la tangente à $\mathcal{C}$ en A . Montrer qu'il existe un point $M \in \mathcal{C}$, distinct de A , tel que A est sur la tangente à $\mathcal{C}$ en M . • • ◦

6 Théorème des accroissements finis

Exercice 20. A l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer

○○○

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right).$$

Exercice 21. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, avec $a < b$. On considère $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et strictement positive, dérivable sur $]a, b[$.

●●○

1. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp \left((b-a) \frac{f'(c)}{f(c)} \right).$$

2. Peut-on remplacer l'hypothèse « strictement positive sur $[a, b]$ » par « qui ne s'annule pas $[a, b]$ » ?

7 Inégalité des accroissements finis

Exercice 22. On considère pour tout $p \in \mathbf{N}$, $S_p = \sum_{n=0}^p \frac{1}{n^2 + 1}$.

●○○

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. En appliquant le théorème des accroissement finis à Arctan sur $[n; n+1]$, montrer que :

$$\frac{1}{(n+1)^2 + 1} < \text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan}(n) < \frac{1}{n^2 + 1}.$$

2. Simplifier $\sum_{n=0}^p (\text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan}(n))$. En déduire que $\text{Arctan}(p+1) < S_p$.
3. Simplifier $\sum_{n=1}^p (\text{Arctan}(n) - \text{Arctan}(n-1))$. En déduire, toujours en utilisant le résultat de la question 1., que $S_p < \text{Arctan}(p) + 1$.
4. Démontrer que $\left(\frac{S_p}{p} \right)_{p \in \mathbf{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 23. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

●●○

1. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, prouver que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \frac{1-\alpha}{(k+1)^\alpha} \leq (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \leq \frac{1-\alpha}{k^\alpha}.$$

2. En déduire un encadrement de $\frac{1}{k^\alpha}$ pour $k \geq 2$ entier.
3. En déduire un encadrement de u_n , pour $n \in \mathbf{N}^*$, puis un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$.
4. Application : donner un équivalent de $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)_{n \in \mathbf{N}^*}$.

8 Equations fonctionnelles

Exercice 24. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur $\mathbf{R}$ et paire. Le but de l'exercice est de démontrer qu'il existe une unique fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ telle que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = g(x^2)$.

○○○

1. On suppose que la fonction g existe. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $g(x) = f(\sqrt{x})$.
2. Posons $g : x \mapsto f(\sqrt{x})$ et montrons que cette fonction est bien solution du problème.
 - (a) Justifier que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = g(x^2)$.
 - (b) Montrer que, puisque f est paire, f' est impaire. En déduire $f'(0)$.
 - (c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \frac{f''(0)}{2}$.
 - (d) En déduire que $g'(0) = \frac{f''(0)}{2}$.
 - (e) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ à l'aide des questions précédentes.
3. Conclure.

Exercice 25. Déterminer toutes les applications dérivables $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x + y) = f(x^2) + f(y).$$

Exercice 26. Trouver les fonctions $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x + y) = e^x f(y) + e^y f(x).$$

Exercice 27. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy.$$

9 Probabilités

Exercice 28. On lance un dé quatre fois de suite. Calculer les probabilités suivantes :

1. On obtient quatre fois le même chiffre.
2. On obtient quatre chiffres différents.
3. On obtient quatre chiffres qui se suivent (dans l'ordre croissant ou décroissant).

Exercice 29. On considère une société dont chaque individu peut avoir les caractéristiques suivantes :

- il peut être bleu (probabilité p) ou rouge (probabilité $1 - p$) ;
- il peut être riche (probabilité q) ou pauvre (probabilité $1 - q$).

On sait de plus que 70% des bleus sont riches et 70% des riches sont bleus. La richesse est-elle équitablement répartie entre les bleus et les rouges ?

Exercice 30. Deux personnes A et B jouent au jeu suivant : A lance une pièce et s'il obtient pile, il a gagné. Sinon B lance une pièce et s'il obtient face il a gagné. Sinon, c'est à nouveau à A de jouer...

On suppose que le jeu s'arrête après 10 lancers (cinq pour chaque joueur). Calculer la probabilité des événements suivants.

1. Le joueur A gagne en lançant moins de trois fois sa pièce.
2. Le joueur B gagne.
3. Personne ne gagne.
4. On suppose que quelqu'un a gagné. Quelle est la probabilité que ce soit A ?

Exercice 31. On dispose de deux urnes, la première contenant 6 boules rouges et trois noires, et la deuxième 6 noires et trois rouges. On choisit une urne au hasard, puis on y tire deux boules, on obtient deux rouges. Quelle est la probabilité qu'on ait choisi la première urne ? Même question si on effectue les deux tirages successivement avec remise.

Exercice 32. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit A un événement. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{P}_A = \mathbb{P}$. • ◦ ◦

Indication : on pourra calculer $\mathbb{P}_A(A)$.

Exercice 33. Une information binaire (de la forme « oui » ou « non ») est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p , l'information reçue d'une personne est transmise correctement à la personne suivante. Avec une probabilité $1-p$, l'information reçue d'une personne est transmise de façon contraire à la personne suivante. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte. • ◦ ◦

1. On note I_n : « l'information après n transmissions est correcte ». Justifier que $\mathbb{P}_{I_n}(I_{n+1}) = p$ et $\mathbb{P}_{\overline{I_n}}(I_{n+1}) = 1 - p$.
2. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n .
3. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n .
4. En déduire la valeur de la limite de (p_n) . Qu'en pensez-vous ?

Exercice 34. Un aventurier a une probabilité p de déposer son trésor dans une banque. Si l'aventurier a décidé de placer son trésor à la banque, il choisit un des N casiers de la salle des coffres au hasard (le choix est équiprobable) pour y placer sa fortune. • ◦ ◦

Un voleur s'introduit dans la banque et ouvre $N - 1$ casiers sans trouver le trésor. Le but de l'exercice est de déterminer la probabilité que le trésor soit dans le dernier coffre.

1. On suppose pour cette question $N = 3$.
 - (a) On note A l'événement « un trésor est placé dans un des coffres ». Donner $\mathbb{P}(A)$.
 - (b) On note A_i l'événement « le trésor est placé dans le coffre i », et $a = \mathbb{P}(A_1)$. Déterminer a en fonction de p .
 - (c) On note $B = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$. Calculer $\mathbb{P}(B)$.
 - (d) Quelle est la probabilité que le trésor soit dans le dernier coffre ?
2. On suppose que N est un entier non nul quelconque. En reprenant la méthode développée avant, déterminer la probabilité que le trésor soit dans le dernier coffre ?