
Colles - planche 12

Thèmes abordés : polynômes.

1 Généralités

Exercice 1. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$. On suppose que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P(x) \in \mathbf{R}$. Montrer que les coefficients de P sont tous réels. ○○○

2 Division euclidienne

Exercice 2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer le degré de $(X^2 + 1)^n - 2X^{2n} + (X^2 - 1)^n$ (on pourra distinguer des cas suivant la valeur de n). ○○○

Exercice 3. Soit $a \in \mathbf{C}$. ○○○

1. Déterminer les solutions de l'équation $a^3 - 2a - 1 = 0$ d'inconnue $a \in \mathbf{C}$.
2. Effectuer la division euclidienne de $X^4 - X + a$ par $X^2 - aX + 1$.
3. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $X^2 - aX + 1$ divise $X^4 - X + a$.

Exercice 4. Soit $(p, q) \in \mathbf{R}^2$. On considère $P = X^3 + pX + q$ et $Q = X^2 + 3X - 1$. ○○○

1. Effectuer la division euclidienne de P par Q .
2. Déterminer les valeurs de (p, q) pour lesquelles Q divise P .

3 Equations

Exercice 5. L'objectif de l'exercice est de déterminer les polynômes de $\mathbf{C}[X]$ qui vérifient ○○○

$$2P(X) = P(2X). \quad (\star)$$

1. Soit P un polynôme non nul vérifiant $(\star)$. On note $n = \deg(P)$ et on écrit P sous la forme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.
 - (a) Rappeler pourquoi $P(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_n x^n$.
 - (b) Quel est le coefficient dominant de $P(2X)$?
 - (c) Dédurre de la question précédente un équivalent de la fonction $x \mapsto P(2x)$ en $+\infty$.
 - (d) A l'aide des questions 1.(a) et 1.(c), montrer que $n = 1$.
2. Conclure.

Exercice 6. L'objectif de cet exercice est de déterminer les polynômes de $\mathbf{C}[X]$ qui vérifient ○○○

$$P(X^2) = (P(X))^2. \quad (\star)$$

1. Soit P un polynôme non nul vérifiant $(\star)$. On note $n = \deg(P)$ et on écrit P sous la forme $P = aX^n + Q$, où $a \in \mathbf{C}^*$ et Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$.
 - (a) Exprimer $P(X^2)$ en fonction de a , n et Q . Déterminer le degré et le coefficient dominant de $P(X^2)$.
 - (b) Exprimer $(P(X))^2$ en fonction de a , n et Q . Déterminer le degré et le coefficient dominant de $(P(X))^2$.
 - (c) A partir des deux questions précédentes, montrer que $a = 1$.
 - (d) Supposons Q non nul et notons $p < n$ le degré de Q .
 - i. Quel est le degré de $Q(X^2)$?
 - ii. Quel est le degré de $2aX^nQ(X) + Q(X)^2$?
 - iii. Obtenir une contradiction (on pourra réutiliser les expressions obtenues aux questions 1.(a) et 1.(b)).
 - iv. Que peut-on en déduire sur Q ?
2. Conclure.

Exercice 7. L'objectif de l'exercice est de trouver les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ vérifiant

◦ ◦ ◦

$$(X + 4)P(X) = XP(X + 1). \quad (\star)$$

1. Soit P un polynôme vérifiant $(\star)$.
 - (a) Montrer que $0, -1, -2$ et -3 sont des racines de P .
 - (b) Justifier rapidement pourquoi on peut déduire de la question précédente qu'il existe $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P(X) = X(X + 1)(X + 2)(X + 3)Q$.
Montrer, en utilisant $(\star)$, que $Q(X) = Q(X + 1)$.
 - (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $Q(n) = Q(0)$.
 - (d) A l'aide de la question précédente, justifier que Q est un polynôme constant.
2. Conclure.

Exercice 8. On considère l'application Φ de $\mathbf{R}[X]$ dans lui-même définie par

◦ ◦ ◦

$$\Phi(P) = (2X - 1)P - \left(X^2 + \frac{1}{2}\right)P',$$

où P' désigne le polynôme dérivé. Déterminer le degré de $\Phi(P)$ en fonction du degré P . Résoudre $\Phi(P) = 1$.

Exercice 9. On veut déterminer tous les polynômes P de $\mathbf{R}[X]$ qui vérifient

• ◦ ◦

$$(X^2 + 1)P'' - 6P = 0 \quad \text{et} \quad P(1) = 2.$$

1. On se donne $P \in \mathbf{R}[X]$ une solution du problème.
 - (a) Justifier que $\deg(P) > 1$.
 - (b) Montrer que $\deg(P) = 3$.
2. Conclure.

Exercice 10. On veut déterminer tous les polynômes de $\mathbf{C}[X]$ qui vérifient $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

• ◦ ◦

1. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ quelconque. Déterminer $\deg(P'')$ en fonction de $\deg(P)$ (on pourra distinguer des cas).
2. Soit P un polynôme non nul solution du problème. Notons $d = \deg(P)$.
 - (a) Montrer que si $d < 2$, alors $P = 0$.
 - (b) Montrer que si $d \geq 2$, alors $d = 3$.
3. Conclure

4 Factorisations

Exercice 11. Soit $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$. • ○ ○

1. Déterminer le degré de P et son coefficient dominant.
2. Montrer que j est une racine multiple de P (on rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$).
3. Trouver deux racines réelles évidentes de P .
4. Décomposer P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 12. Soit $P = X^6 - X^3 + 1$. • ○ ○

1. Résoudre l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ dans $\mathbf{C}[X]$. On donnera les solutions sous forme exponentielle.
2. En déduire la décomposition de P dans $\mathbf{C}[X]$.
3. Décomposer P dans $\mathbf{R}[X]$.
4. Calculer

$$S = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) \quad \text{et} \quad P = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \times \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) \times \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right).$$

Exercice 13. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme unitaire. Montrer que P est scindé dans $\mathbf{R}[X]$ si et seulement si • ○ ○

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad |P(z)| \geq |\Im m(z)|^{\deg(P)}.$$