
Colles - planche 13

Thèmes abordés : variables aléatoires et intégration.

Question de cours. 1. Énoncer le théorème de D'Alembert-Gauss.

2. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral en 0.

3. Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Question de cours. 1. Énoncer le théorème de convergence pour une somme de Riemann.

2. Énoncer les relations coefficients/racines pour un polynôme scindé.

3. Calculer la puissance n -ième de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Question de cours. 1. Énoncer le théorème de la limite monotone pour les suites.

2. Énoncer les développements limités usuels au voisinage de 0 (exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$)

3. Calculer les racines 3-ième de $1 + \sqrt{3}i$.

1 Variables aléatoires

1.1 Loi, espérance, variance

Exercice 1. On lance des fusées vers Mars. A chaque lancer, la probabilité de réussite est de 0,7. On effectue dix lancers successifs. ○ ○ ○

1. Quelle est la probabilité d'obtenir k lancers réussis ?

2. Quel est le nombre moyen de lancers réussis ?

3. Combien faudrait-il de lancer pour avoir 98% de chances qu'au moins un lancer ait réussi ?

Exercice 2. Soit $N \in \mathbb{N}$, n un diviseur de N , $p \in]0; 1[$. ● ○ ○

On désire analyser le sang d'une population de N individus pour détecter la présence d'un virus qui affecte les individus de la population avec une probabilité p . Pour cela, on a deux possibilités.

(a) On analyse le sang de chaque personne.

(b) On regroupe les personnes en groupes de n , et on analyse le sang du groupe. Si le test du groupe est positif, on analyse individuellement chaque individu du groupe. Si le test du groupe est négatif, on peut en conclure qu'aucune personne dans le groupe testé n'est infectée.

1. On note X le nombre de groupes positifs quand on utilise la méthode (b). Donner la loi de X .

2. On note Y le nombre total d'analyses effectuées avec la méthode (b). Calculer en fonction de N , n et p l'espérance de Y .

3. Comparer les deux méthodes dans le cas où $N = 1000$, $n = 10$ et $p = 0,01$. On donne $1 - 0,99^{10} \approx 0,096$.

Exercice 3. Une piste rectiligne infinie est divisée en cases numérotées $0, 1, 2, \dots$ de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut. Au départ, elle est sur la case 0. Soit X_n le numéro de la case occupée par la puce après n sauts et Y_n le nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de Y_n .
2. En déduire celles de X_n .

1.2 Couples de variables aléatoires

Exercice 4. Soit $n \geq 1$. On répartit au hasard n boules dans trois sacs notés S_1, S_2 et S_3 , indépendamment les uns des autres. On note, pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, N_i le nombre de boules dans le sac S_i . ◦ ◦ ◦

1. Déterminer les lois, espérances et les variances de N_1, N_2 et N_3 .
2. Déterminer la loi de $N_1 + N_2$.

1.3 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 5. Un exploitant agricole possède 100 vaches qui se répartissent au hasard entre deux étables, qui contiennent chacune n places ($50 \leq n \leq 100$). • ◦ ◦
Notons X la variable aléatoire égale au nombre de vache qui choisissent l'étable numéro 1.

1. Donner la loi de X , ainsi que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Notons E l'événement « chaque vache trouve une place ». Exprimer E à l'aide de X .
3. Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur de n permettant à chaque vache de trouver une place, avec une probabilité supérieure à 95%.

Exercice 6. Soit $n \geq 1$. Une urne contient une proportion inconnue p de boules blanches. On y effectue n tirages avec remise et on note X_n le nombre de boules blanches obtenues lors de ces n tirages. • • ◦

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_n .
2. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P} \left(\left| \frac{X_n}{n} - p \right| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

3. Combien de tirages faut-il effectuer pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'obtention de boules blanches au cours des tirages diffère de p d'au plus 10^{-2} .

2 Intégration sur un segment

2.1 Suites d'intégrales

Exercice 7. On considère la suite (I_n) définie par • ◦ ◦

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt.$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2 .
2. Déterminer la limite de la suite (I_n) .
3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer S_n en fonction de I_n .

5. Dédurre des questions précédentes la convergence et la limite de la suite (S_n) .

Exercice 8. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} .
2. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante et strictement positive.
3. Montrer que $I_{n+1} \sim I_n$.
4. En considérant le produit $(n+1)I_{n+1}I_n$, déterminer un équivalent simple de (I_n) quand n tend vers $+\infty$.
5. Dédurre de la première question que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

2.2 Fonctions définies par une intégrale

Exercice 9. On considère $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer le signe de f .
3. Déterminer la dérivée de f .
4. Étudier les variations de f .
5. Déterminer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.

Exercice 10. On considère $f : u \mapsto \int_0^\pi e^{-u \sin(x)} dx$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$.
(b) Déterminer, si elle existe, la limite en 0^+ de f .
3. (a) Soit $u \in \mathbf{R}$. À l'aide du changement de variable $y = \pi - x$, démontrer que

$$\int_0^\pi e^{-u \sin x} dx = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-u \sin x} dx.$$

- (b) Montrer que pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}$.
- (c) Déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de f .

2.3 Sommes de Riemann

Exercice 11. 1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}$.

2. Démontrer, avec la formule de Taylor avec reste intégral en 0, que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right)$.

Exercice 12. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!(2n)}{n^n}}$.

Exercice 13. 1. A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, démontrer que pour tout $x \in [0; 1]$, • ◦ ◦

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \sin \frac{n}{n^2 + k^2}$ existe et calculer cette limite.

2.4 Equation fonctionnelle

Exercice 14. Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbf{R})$ qui satisfont • ◦ ◦

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 (f(x^2))^2 \, dx.$$

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbf{R})$.

1. Dans $\int_0^1 f(x) \, dx$, effectuer le changement de variable $x = t^2$.
2. Montrer que

$$\frac{1}{3} + \int_0^1 f(x^2)^2 \, dx - \int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 (x - f(x^2))^2 \, dx.$$

3. Conclure.