Colles - planche 14

Thèmes abordés : développements limités, espaces vectoriels.

1 Cours

Question de cours. Donner la définition d'application linéaire entre deux espaces vectoriels. Soit u une application linéaire entre deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels E et F. Montrer que $u(0_E) = 0_F$. Montrer que u est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$.

Question de cours. Donner la définition du noyau et de l'image d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F, et démontrer que ce sont des sous-espaces vectoriels (respectivement de E et de F).

Question de cours. On considère

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x, x+2y+3z, 3x+2y+3z) \end{array}$$

1. Déterminer une famille finie génératrice du noyau de f.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathrm{Im}(f)$.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ?

2 Développements limités

2.1 Calcul de développements limités

Exercice 1. ○○○

1. Calculer un développement limité à l'ordre 5 de Arctan.
2. Calculer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de

$$g : x \longmapsto \frac{\mathrm{Arctan}(x) - x}{\sin(x) - x}.$$

Exercice 2. Soit $a \in \mathbf{R}$. On pose ●●○

$$f_a : x \longmapsto \mathrm{Arctan}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right).$$

Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. Donner le $\mathrm{DL}_{2n-1}(0)$ de f_a'.
2. En déduire le $\mathrm{DL}_{2n}(0)$ de f_a.
3. Soit $k \in \mathbf{N}$. Déduire de la question précédente $f_a^{(k)}(0)$.

2.2 Application des développements limités

Exercice 3. Donner une équation de l'asymptote D au voisinage de $+\infty$ à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction ● ○ ○

$$f : x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$$

On préciser la position relative de D par rapport à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 4. On considère la fonction suivante ● ○ ○

$$f : \begin{array}{rcl} [-1\,;\,1]\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) \end{array}.$$

Peut-on prolonger f en une fonction continue, dérivable en 0 ? Préciser alors la position de la courbe de ce prolongement vis-à-vis de sa tangente en 0.

Exercice 5. On considère la fonction ● ○ ○

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2+x+1} \end{array}.$$

et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Donner les variations de f.
2. Etudier l'existence d'asymptotes pour $\mathscr{C}$. Le cas échéant, on précisera la position de la courbe par rapport à son asymptote.
3. Donner l'allure de $\mathscr{C}$.

Exercice 6. ● ○ ○

1. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f : x \longmapsto \ln(1+\mathrm{sh}(x))$.
2. Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $g : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+\mathrm{sh}(x))}{\sin(x)}$.
3. La fonction g est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Le cas échéant, ce prolongement est-il dérivable ?

Exercice 7. Déterminer un équivalent de ● ○ ○

$$h : x \longmapsto \frac{\sin(x)\,\mathrm{sh}(x)}{\sin(x^2)} - 1$$

au voisinage de 0.

Exercice 8. On considère ● ○ ○

$$f : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{\cos(x)} - \mathrm{e}^{\mathrm{ch}(x)}}{\cos(x) - \mathrm{ch}(x)}$$

Calculer, si elle existe, la limite de f en 0.

Exercice 9. On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I =]-1\,;\,1[$ par ● ● ○

$$f(x) = x + \ln(1+x).$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0.
2. Démontrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on explicitera.
3. Justifier que f^{-1} admet un $\mathrm{DL}_3(0)$, puis déterminer celui-ci.

3 Espaces vectoriels

3.1 Généralités

Exercice 10. On se place dans l'espace vectoriel de référence $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E ? ○ ○ ○

1. $F_1 = \left\{ f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}) \mid \forall x \in \mathbf{R},\ f(x^2) = f(2x) \right\}$.
2. L'ensemble F_2 des fonctions dont la courbe admet une tangente horizontale en 0.
3. L'ensemble F_3 des fonctions dont la courbe admet une asymptote (horizontale ou oblique) au voisinage de $+\infty$.
4. L'ensemble F_4 des fonctions admettant un minimum global.

3.2 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Exercice 11. Soit $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = y \text{ et } y = z \right\}$ et $G = \left\{ (b+c, b, c) \ :\ (b,c) \in \mathbf{R}^2 \right\}$. ○ ○ ○

1. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer $u \in \mathbf{R}^3$ tel que $F = \mathrm{Vect}\,(u)$.
3. Déterminer une équation cartésienne de G.
4. Déterminer $F \cap G$.
5. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?
6. Décomposer $(1,2,3)$ dans $F + G$.

Exercice 12. Soit $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + y - 3z = 0 \right\}$ et $G = \left\{ (2b+c, b-c, 3b-c) \ :\ (b,c) \in \mathbf{R}^2 \right\}$. ○ ○ ○

1. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer $(u,v) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ tel que $F = \mathrm{Vect}\,(u,v)$.
3. Déterminer une équation cartésienne de G.
4. Déterminer $F \cap G$.
5. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 13. Montrer que $F = \mathrm{Vect}\left(X, X^2\right)$ et $G = \{ P \in \mathbf{R}_2[X] \mid P' = 0 \}$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}_2[X]$. ○ ○ ○

Exercice 14. Notons $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$. Soit $F = \{ f \in E \mid f(1) = f(0) = 0 \}$ et G l'ensemble des fonctions affines sur $\mathbf{R}$. ○ ○ ○

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

3.3 Applications linéaires

Exercice 15. Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, G et H deux sous-espaces vectoriels de E. • ○ ○

1. Montrer que $f(G+H) = f(G) + f(H)$.
2. Montrer que si G et H sont en somme directe et si f est injective, alors

$$f(G+H) = f(G \oplus H) = f(G) \oplus f(H).$$

Exercice 16. Soit E, F et G trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. • • ○

1. Soit F, G deux espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v \circ u)$.
2. Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.
   (a) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
   (b) Montrer que si g est surjective et $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g)$, alors $g \circ f$ est surjective.
   (c) Formuler des énoncés similaires pour l'injectivité.

Exercice 17. Soit $E \neq \{0\}$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Soit $k \in \mathbf{R}^\star$. On pose ●●○

$$A_k = \{ u \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ u = ku \}.$$

1. A_1 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$? (on pourra admettre qu'il existe un projecteur non nul dans E). Qu'en est-il de A_k ?
2. Soit $u \in A_k$. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 18. Soit E un espace vectoriel et f, g deux projecteurs de E. ●●○

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$ si et seulement si $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 19. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. ●●○

1. Montrer que si f est un projecteur, alors $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
2. L'endomorphisme f est à présent quelconque. Montrer que :
   (a) $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\} \iff \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$;
   (b) $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) \iff \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

Exercice 20. Soit E un espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E. ●●○

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur de E si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que si $p + q$ est un projecteur de E, alors $\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$ et $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.