Programme du 08 février au 19 février

Calcul matriciel : Notion de matrice, de matrice carrée, de matrice diagonale, de matrice triangulaire supérieure et triangulaire inférieure. Matrice nulle, matrice identité. Notion de transposée, de matrice symétrique, antisymétrique.
Opérations sur les matrices.
Interprétation d'un système d'équations linéaires en terme de produit matriciel. Transposée d'un produit. Puissances d'une matrice carrée. Formule du binôme de Newton.
Notion de matrice inversible. Produit de matrices inversibles, transposée d'une matrice inversible. Interprétation des opérations de pivot de Gauss sur les lignes en terme de multiplication matricielle. Caractérisation des matrices inversibles comme étant les seules matrices équivalentes par lignes à la matrice identité.
Extension aux opérations de pivot de Gauss sur les colonnes.
Calcul pratique de l'inverse : méthode d'inversion par des opérations du type pivot de Gauss.

Fonctions numériques : notion de limite. Notion de voisinage d'un point. Définition des différentes notions de limite pour une fonction (limite en un point, en $+\infty$, $-\infty$, limite à gauche, à droite). Stabilité vis-à-vis de l'ordre. Opérations sur les limites : composée de deux fonctions, stabilité algébrique. Théorèmes d'encadrement, de minoration, de majoration. Théorème d'existence de la limite d'une fonction monotone. Relations de comparaison au voisinage d'un point : domination, négligeabilité, équivalence. Équivalents usuels en 0 (sin, $1-\cos$, tan, $x \longmapsto (1+x)^\alpha - 1$, sh, $1-\text{ch}$, $x \longmapsto \ln(1+x)$, $x \longmapsto \mathrm{e}^x - 1$).

Questions de cours.

1. Montrer que toute matrice carrée se décompose de manière unique en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
2. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton pour les matrices.
3. Mise en œuvre de la formule du binôme de Newton pour le calcul de la puissance n-ième d'une matrice du type $\lambda I_3 + T$, où T est une matrice triangulaire stricte d'ordre 3 et $\lambda \in \mathbf{K}$.
4. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$. Montrer que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.
5. Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Soit $\lambda \in \mathbf{K}\setminus\{0\}$. Montrer que les matrices A^{-1}, AB, ${}^tA$ et λA sont inversibles et déterminer leur inverse. Déterminer si une matrice carrée d'ordre 3 donnée par le colleur est inversible et le cas échéant calculer son inverse.

Programme du 08 février au 19 février

Calcul matriciel : Notion de matrice, de matrice carrée, de matrice diagonale, de matrice triangulaire supérieure et triangulaire inférieure. Matrice nulle, matrice identité. Notion de transposée, de matrice symétrique, antisymétrique.
Opérations sur les matrices.
Interprétation d'un système d'équations linéaires en terme de produit matriciel. Transposée d'un produit. Puissances d'une matrice carrée. Formule du binôme de Newton.
Notion de matrice inversible. Produit de matrices inversibles, transposée d'une matrice inversible. Interprétation des opérations de pivot de Gauss sur les lignes en terme de multiplication matricielle. Caractérisation des matrices inversibles comme étant les seules matrices équivalentes par lignes à la matrice identité.
Extension aux opérations de pivot de Gauss sur les colonnes.
Calcul pratique de l'inverse : méthode d'inversion par des opérations du type pivot de Gauss.

Fonctions numériques : notion de limite. Notion de voisinage d'un point. Définition des différentes notions de limite pour une fonction (limite en un point, en $+\infty$, $-\infty$, limite à gauche, à droite). Stabilité vis-à-vis de l'ordre. Opérations sur les limites : composée de deux fonctions, stabilité algébrique. Théorèmes d'encadrement, de minoration, de majoration. Théorème d'existence de la limite d'une fonction monotone. Relations de comparaison au voisinage d'un point : domination, négligeabilité, équivalence. Équivalents usuels en 0 (sin, $1-\cos$, tan, $x \longmapsto (1+x)^\alpha - 1$, sh, $1-\text{ch}$, $x \longmapsto \ln(1+x)$, $x \longmapsto \mathrm{e}^x - 1$).

Questions de cours.

1. Montrer que toute matrice carrée se décompose de manière unique en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
2. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton pour les matrices.
3. Mise en œuvre de la formule du binôme de Newton pour le calcul de la puissance n-ième d'une matrice du type $\lambda I_3 + T$, où T est une matrice triangulaire stricte d'ordre 3 et $\lambda \in \mathbf{K}$.
4. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$. Montrer que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.
5. Soient $A, B\ \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Soit $\lambda \in \mathbf{K}\setminus\{0\}$. Montrer que les matrices A^{-1}, AB, ${}^tA$ et λA sont inversibles et déterminer leur inverse. Déterminer si une matrice carrée d'ordre 3 donnée par le colleur est inversible et le cas échéant calculer son inverse.