
Programme du 08 mars au 19 mars

Fonctions numériques : notion de limite. Notion de voisinage d'un point. Définition des différentes notions de limite pour une fonction (limite en un point, en $+\infty$, $-\infty$, limite à gauche, à droite). Stabilité vis-à-vis de l'ordre. Opérations sur les limites : composée de deux fonctions, stabilité algébrique. Théorèmes d'encadrement, de minoration, de majoration. Théorème d'existence de la limite d'une fonction monotone. Relations de comparaison au voisinage d'un point : domination, négligeabilité, équivalence. Équivalents usuels en 0 ($\sin$, $1 - \cos$, $\tan$, $x \mapsto (1+x)^\alpha - 1$, sh , $1 - \text{ch}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto e^x - 1$).

Continuité. Définition des notions de continuité, continuité à gauche, continuité à droite en un point pour une fonction numérique. Notion de fonction continue sur un intervalle. Notion de prolongement par continuité. Composée de deux fonctions continues. Stabilité algébrique de l'ensemble des fonctions continues en un point. Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un segment par une fonction continue. Image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone. Inversibilité d'une fonction continue strictement monotone, continuité de sa fonction réciproque (théorème de la bijection).

Questions de cours.

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème de l'image d'un segment par une fonction continue et le théorème de la bijection.
2. Soit f une fonction périodique définie sur $\mathbf{R}$ admettant une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.
3. Soit f une fonction numérique définie et continue sur $\mathbf{R}$, admettant des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbf{R}$.
4. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ et continue en 0. On suppose que $f(2x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer que f est constante.
5. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a; b])$ vérifiant $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$. Montrer de manière constructive que f admet au moins un zéro sur $[a; b]$.

Programme du 08 mars au 19 mars

Fonctions numériques : notion de limite. Notion de voisinage d'un point. Définition des différentes notions de limite pour une fonction (limite en un point, en $+\infty$, $-\infty$, limite à gauche, à droite). Stabilité vis-à-vis de l'ordre. Opérations sur les limites : composée de deux fonctions, stabilité algébrique. Théorèmes d'encadrement, de minoration, de majoration. Théorème d'existence de la limite d'une fonction monotone. Relations de comparaison au voisinage d'un point : domination, négligeabilité, équivalence. Équivalents usuels en 0 ($\sin$, $1 - \cos$, $\tan$, $x \mapsto (1+x)^\alpha - 1$, sh , $1 - \text{ch}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto e^x - 1$).

Continuité. Définition des notions de continuité, continuité à gauche, continuité à droite en un point pour une fonction numérique. Notion de fonction continue sur un intervalle. Notion de prolongement par continuité. Composée de deux fonctions continues. Stabilité algébrique de l'ensemble des fonctions continues en un point. Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un segment par une fonction continue. Image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone. Inversibilité d'une fonction continue strictement monotone, continuité de sa fonction réciproque (théorème de la bijection).

Questions de cours.

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème de l'image d'un segment par une fonction continue et le théorème de la bijection.
2. Soit f une fonction périodique définie sur $\mathbf{R}$ admettant une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.
3. Soit f une fonction numérique définie et continue sur $\mathbf{R}$, admettant des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbf{R}$.
4. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ et continue en 0. On suppose que $f(2x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer que f est constante.
5. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a; b])$ vérifiant $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$. Montrer de manière constructive que f admet au moins un zéro sur $[a; b]$.