
Programme du 03 mai au 21 mai

Variables aléatoires sur un univers fini. Définition, loi d'une variable aléatoire. Lois usuelles : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale.

Espérance : définition, exemples : espérance d'une variable aléatoire constante, de l'indicatrice d'un événement, d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme, ou une loi de Bernoulli ou une loi binomiale. Linéarité et croissance. Image d'une variable aléatoire par une fonction, loi associée, formule du transfert.

Variance et écart-type : définition, relation $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$. Variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli ou une loi binomiale. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Couples de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales, loi conditionnelle. Couple de variables aléatoires indépendantes. Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes. Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Intégration. Fonctions en escalier. Intégrale d'une fonction continue sur un segment. Linéarité, positivité et croissance, stricte positivité. Relation de Chasles. Si $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a \leq b$, inégalité $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

Sommes de Riemann.

Théorème fondamental du calcul différentiel. Calcul d'intégrale à l'aide de primitives. Intégration par parties et changement de variable. Formule de Taylor avec reste intégral, formule de Taylor-Young.

Extension au cas des fonctions à valeurs complexes.

Questions de cours. Un énoncé de théorème, une formule et un calcul à faire parmi :

- A) Théorèmes : théorème de la bijection, théorème des valeurs intermédiaires, théorème de Rolle, égalité des accroissements finis, inégalités des accroissements finis (avec la définition de la notion de fonction lipschitzienne), théorème de dérivabilité d'une réciproque, théorème de limite de la dérivée, théorème des suites adjacentes (avec la définition de la notion de suites adjacentes), théorème de majoration, minoration et des gendarmes (pour les suites ou les fonctions), théorème de la limite monotone (suites ou fonctions), théorème de D'Alembert-Gauss, division euclidienne dans $\mathbf{K}[X]$, stricte positivité de l'intégrale, inégalité de la moyenne, théorème de convergence pour une somme de Riemann, théorème fondamental du calcul différentiel.
- B) Formules : formulaire de trigonométrie, factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$, formule de la somme des termes d'une suite géométrique, formule du binôme de Newton (version numérique ou matricielle), formule de Taylor-Young, formule de Taylor (pour les polynômes), formule de Leibniz, formule de Taylor avec reste intégral, relations coefficients-racines pour un polynôme scindé (uniquement somme et produit), domaine de définition, graphe et dérivée des fonctions usuelles, équivalents usuels (suites ou fonctions). Développements limités usuels au voisinage de 0 ($\exp$, $\sin$, $\cos$, sh , ch , $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$), formule de transfert.
- C) Calculs : transformation de $a \cos(x) + b \sin(x)$ en $A \cos(x - \phi)$, linéarisation d'une expression trigonométrique, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ ou $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$, calcul des racines carrées d'un nombre complexe, calcul des racines n -ième d'un nombre complexe, calcul du terme général d'une suite arithmético-géométrique, calcul du terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants et second membre du type $Ae^{\lambda x}$, $B \cos(\omega x)$ ou $B \sin(\omega x)$, résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss, calcul de l'inverse d'une matrice, calcul de la puissance n -ème d'une matrice de la forme $\lambda I_3 + T$ où T est une matrice triangulaire à diagonale nulle, calcul d'une dérivée n -ième d'une fonction du type $x \mapsto P(x)e^{\alpha x}$ où P est un polynôme, calcul d'une intégrale par intégration par parties ou changement de variable (donné par le colleur), calcul des primitives d'une fonction du type $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$, calcul des primitives d'une fonction du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$.