
Programme du 24 mai au 04 juin

Développements limités. Développements limités : définition, unicité, troncature, forme normalisée. Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient (par composition avec $\frac{1}{1+u}$). Composition dans des cas simples. Intégration d'un développement limité. Formule de Taylor-Young.

Développements limités usuels à tout ordre en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $\exp$, $\cos$, $\sin$, ch , sh , $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbf{R}$. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\tan$ et Arctan .

Applications des développements limités : calcul de limites. Étude locale d'une fonction : prolongement par continuité, dérivabilité du prolongement, tangente, position relative de la courbe et de la tangente. Détermination d'asymptote et étude des positions relatives.

Espaces vectoriels. Structure de $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Exemples de référence : $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}[X]$, $\mathbf{K}^\Omega$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Sous-espaces vectoriels, caractérisation. Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.

Intersection de sous-espaces vectoriels. Somme de sous-espaces vectoriels. Somme directe. Caractérisation par l'intersection. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Applications linéaires. Applications linéaires, endomorphismes. Opérations : combinaison linéaire et composée. Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel. Image et noyau. Caractérisation de l'injectivité. Équation linéaire.

Questions de cours.

1. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E . Montrer que $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel au sens de l'inclusion qui contient $F \cup G$.
2. Donner la définition d'application linéaire entre deux espaces vectoriels. Soit u une application linéaire entre deux $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels E et F . Montrer que $u(0_E) = 0_F$. Montrer que u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker}(u) = \{0_E\}$.
3. Donner la définition du noyau et de l'image d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F , et démontrer que ce sont des sous-espaces vectoriels (respectivement de E et de F).
4. Soit E , F des $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels et $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(v) \subset \operatorname{Ker}(u+v)$ et $\operatorname{Im}(u+v) \subset \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v)$.
5. Étant donné un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ donné par le colleur, décrire son noyau comme un sous-espace vectoriel engendré, et déterminer un système d'équations cartésiennes de son image.

Programme du 24 mai au 04 juin

Développements limités. Développements limités : définition, unicité, troncature, forme normalisée. Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient (par composition avec $\frac{1}{1+u}$). Composition dans des cas simples. Intégration d'un développement limité. Formule de Taylor-Young.

Développements limités usuels à tout ordre en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $\exp$, $\cos$, $\sin$, ch , sh , $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbf{R}$. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\tan$ et Arctan .

Applications des développements limités : calcul de limites. Étude locale d'une fonction : prolongement par continuité, dérivabilité du prolongement, tangente, position relative de la courbe et de la tangente. Détermination d'asymptote et étude des positions relatives.

Espaces vectoriels. Structure de $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Exemples de référence : $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}[X]$, $\mathbf{K}^\Omega$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Sous-espaces vectoriels, caractérisation. Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.

Intersection de sous-espaces vectoriels. Somme de sous-espaces vectoriels. Somme directe. Caractérisation par l'intersection. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Applications linéaires. Applications linéaires, endomorphismes. Opérations : combinaison linéaire et composée. Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel. Image et noyau. Caractérisation de l'injectivité. Équation linéaire.

Questions de cours.

1. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E . Montrer que $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel au sens de l'inclusion qui contient $F \cup G$.
2. Donner la définition d'application linéaire entre deux espaces vectoriels. Soit u une application linéaire entre deux $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels E et F . Montrer que $u(0_E) = 0_F$. Montrer que u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker}(u) = \{0_E\}$.
3. Donner la définition du noyau et de l'image d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F , et démontrer que ce sont des sous-espaces vectoriels (respectivement de E et de F).
4. Soit E , F des $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels et $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(v) \subset \operatorname{Ker}(u+v)$ et $\operatorname{Im}(u+v) \subset \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v)$.
5. Étant donné un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ donné par le colleur, décrire son noyau comme un sous-espace vectoriel engendré, et déterminer un système d'équations cartésiennes de son image.