
Programme du 07 juin au 17 juin

Famille de vecteurs. Famille libre, famille liée, famille génératrice. Base, coordonnées d'un vecteur dans une base. Bases canoniques des espaces $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Famille de polynômes de degrés échelonnés.

Base adaptée à une somme directe. Si $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est libre, alors $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont en somme directe. Sous-espaces supplémentaires et concaténation des bases.

Espaces vectoriels de dimension finie. Existence de base. Théorèmes de la base extraite et de la base incomplète. Lien entre le cardinal d'une famille libre et celui d'une famille génératrice. Dimension. Caractérisation des bases.

Rang d'une famille de vecteurs. Caractérisation des familles libres par le rang.

Méthode pratique de calcul du rang d'une famille de vecteurs à l'aide de la représentation matricielle.

Sous-espaces vectoriels en dimension finie. Dimension d'un sous-espace et cas d'égalité. Existence d'un supplémentaire. Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie.

Formule de Grassmann.

Applications linéaires en dimension finie. Une application linéaire est caractérisée par l'image d'une base. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Invariance du rang par composition avec un isomorphisme. Caractérisation des isomorphismes, des automorphismes. Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension.

Questions de cours.

1. Que peut-on dire d'un endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$? Prouver que si p est un tel endomorphisme, alors $\text{Ker}(p) \oplus \text{Ker}(p - \text{Id}) = E$.
2. Si E est de dimension finie, $F \oplus G = E$ si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.
3. Déterminer un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_3[X]$ donné par le colleur.
4. Déterminer si deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ donnés par équations et par le colleur sont supplémentaires.
5. Énoncer le théorème du rang. Déterminer une base du noyau, une base de l'image et le rang d'une application linéaire de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ donnée par le colleur (avec $n, p \leq k$).

Programme du 07 juin au 17 juin

Famille de vecteurs. Famille libre, famille liée, famille génératrice. Base, coordonnées d'un vecteur dans une base. Bases canoniques des espaces $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Famille de polynômes de degrés échelonnés.

Base adaptée à une somme directe. Si $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est libre, alors $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont en somme directe. Sous-espaces supplémentaires et concaténation des bases.

Espaces vectoriels de dimension finie. Existence de base. Théorèmes de la base extraite et de la base incomplète. Lien entre le cardinal d'une famille libre et celui d'une famille génératrice. Dimension. Caractérisation des bases.

Rang d'une famille de vecteurs. Caractérisation des familles libres par le rang.

Méthode pratique de calcul du rang d'une famille de vecteurs à l'aide de la représentation matricielle.

Sous-espaces vectoriels en dimension finie. Dimension d'un sous-espace et cas d'égalité. Existence d'un supplémentaire. Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie.

Formule de Grassmann.

Applications linéaires en dimension finie. Une application linéaire est caractérisée par l'image d'une base. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Invariance du rang par composition avec un isomorphisme. Caractérisation des isomorphismes, des automorphismes. Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension.

Questions de cours.

1. Que peut-on dire d'un endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$? Prouver que si p est un tel endomorphisme, alors $\text{Ker}(p) \oplus \text{Ker}(p - \text{Id}) = E$.
2. Si E est de dimension finie, $F \oplus G = E$ si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.
3. Déterminer un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_3[X]$ donné par le colleur.
4. Déterminer si deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ donnés par équations et par le colleur sont supplémentaires.
5. Énoncer le théorème du rang. Déterminer une base du noyau, une base de l'image et le rang d'une application linéaire de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ donnée par le colleur (avec $n, p \leq k$).