

Variables aléatoires sur un univers fini

Dans tout le chapitre, (Ω, P) est un espace probabilisé fini.

1 Variables aléatoires

Définition — On appelle variable aléatoire sur Ω toute application définie sur Ω , à valeurs dans un ensemble E .

Remarque : Si $E = \mathbb{R}$, on dit que $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle.

Exemple : Alice et Bob jouent au dé. Si un numéro pair sort, Bob perd 3€, si 1 ou 5 sortent, Alice perd 5€. Si 3 sort, la partie est nulle. On considère la variable aléatoire X égale au gain algébrique d'Alice.

Ici l'univers est $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket$ et il est muni de la probabilité uniforme.

ω	1	2	3	4	5	6
$X(\omega)$	-5	3	0	3	-5	3

Notation : Soit X une variable aléatoire : $X : \Omega \rightarrow E$. Soit A une partie de E . On note $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ l'événement $X^{-1}(A)$: ainsi

$$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\}$$

Supposons que $E = \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\{X = x\} = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$$

$$\{X \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\}$$

Exemple : Reprenons l'exemple précédent. Avec les notations introduites, on obtient

$$p(X = 2) = p(\emptyset) = 0$$

$$p(X = 3) = p(\text{"obtenir un numéro pair"}) = \frac{1}{2}$$

et

$$p(X \leq 0) = p(\text{"Alice ne gagne pas d'argent"}) = p(\{1; 3; 5\}) = \frac{1}{2}.$$

2 Loi d'une variable aléatoire

Définition — Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On appelle loi de probabilité de X l'application :

$$\begin{aligned} P_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto P(X \in A) \end{aligned}$$

Proposition. P_X est une probabilité sur $X(\Omega)$

Preuve : • $P_X(X(\Omega)) = P(X \in X(\Omega)) = P(\Omega) = 1$

- Soit $A, B \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ avec $A \cap B = \emptyset$. $P_X(A \cup B) = P(X \in A \cup B) = P((X \in A) \cup (X \in B))$.
Or $(X \in A) \cap (X \in B) = (X \in A \cap B)$ donc $(X \in A) \cap (X \in B) = \emptyset$ car $A \cap B = \emptyset$.
Ainsi $P_X(A \cup B) = P(X \in A) + P(X \in B) = P_X(A) + P_X(B)$
Donc P_X est bien une probabilité sur $X(\Omega)$. $\square$

Remarque : P_X est entièrement déterminée par la donnée de $P_X(\{x\})$ pour tout $x \in X(\Omega)$ car alors, pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$,

$$P_X(A) = \sum_{x \in A} P_X(\{x\}).$$

Exemple : Toujours avec l'exemple précédent, la loi de X est donnée par :

x	3	0	-5
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

Remarque : Puisque P_X est une loi de probabilité, $P_X(X(\Omega)) = 1$ donc

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P_X(\{x\}) = 1.$$

Exemple : Soit $A \subset \Omega$. On rappelle qu'on a défini la fonction indicatrice de A , notée $\mathbb{1}_A$, en posant pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_A = 1$ si $\omega \in A$, $\mathbb{1}_A = 0$ si $\omega \notin A$.

Alors $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire réelle, à valeurs dans $\{0; 1\}$, et sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x	0	1
$P(\mathbb{1}_A = x)$	$P(\bar{A})$	$P(A)$

Exemple : On lance deux dés équilibrés et on note X le plus grand chiffre obtenu. Déterminer la loi de probabilité de X .

Toutes les issues sont équiprobables (on imagine que les deux dés sont discernables) et $\text{Card}(\Omega) = 6^2$ (6 possibilités pour le résultat du premier dé, 6 pour le second). La variable aléatoire X est à valeurs dans $\llbracket 1; 6 \rrbracket$ et pour tout $k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, $\text{Card}(\{X \leq k\}) = k^2$ (les deux dés doivent tomber sur des chiffres de $\llbracket 1; k \rrbracket$) donc

$$p(X \leq k) = \frac{k^2}{36}.$$

Soit $k \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$. $P(X = k + 1) + P(X \leq k) = P(X \leq k + 1)$ car l'événement $\{X \leq k + 1\}$ est la réunion disjointe des événements $\{X \leq k\}$ et $\{X = k + 1\}$.

Donc $P(X = k + 1) = P(X \leq k + 1) - P(X \leq k) = \frac{2k+1}{36}$.

On en déduit que la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

3 Lois usuelles

3.1 Loi uniforme

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $\llbracket a; b \rrbracket$ lorsque

- $X(\Omega) = \llbracket a; b \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket a; b \rrbracket, P(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}$

Si c'est le cas, on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(a, b)$

3.2 Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0, 1[$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p lorsque

- $X(\Omega) = \{0; 1\}$
- $P(X = 1) = p$ (et alors $P(X = 0) = 1 - p$.)

Si c'est le cas, on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Exemples :

- On lance une pièce équilibrée. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de "pile" obtenu. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
- On tire une boule dans une urne contenant une proportion p de boules blanches. Notons X la variable aléatoire donnant le nombre de boule blanche obtenue. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Remarque : Si A est un événement de probabilité $p \in]0, 1[$, alors $X = \mathbb{1}_A$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

Réciproquement, si X est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p , alors $X = \mathbb{1}_A$ où $A = \{X = 1\}$.

Remarque : Si l'on s'intéresse à une expérience aléatoire ayant deux issues possibles nommées succès et échec (expérience appelée épreuve de Bernoulli), alors la variable aléatoire donnant le nombre de succès obtenu suit la loi de Bernoulli de paramètre p où p est la probabilité d'obtenir un succès.

3.3 Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*, p \in]0, 1[$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre n et p lorsque :

- $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

Si c'est le cas, on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Remarque : Vérifiez que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = 1$.

Remarque : On considère une expérience aléatoire ayant deux issues, appelées succès et échec. Notons p la probabilité d'obtenir un succès. Répétons n fois de manière indépendante cette expérience aléatoire et notons X la variable aléatoire donnant le nombre de succès obtenus lors de ces n répétitions. Alors

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

En effet, notons pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ A_i l'événement "le résultat de la i -ème épreuve de Bernoulli est un succès. X est à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$ et pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, puisque les événements A_i sont

indépendants les uns des autres,

$$\begin{aligned}
 P(X = k) &= \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{C \subset \llbracket 1; n \rrbracket \\ \text{Card}(C)=k}} P\left(\bigcap_{i \in C} A_i \cap \bigcap_{i \notin C} \bar{A}_i\right) \\
 &= \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{C \subset \llbracket 1; n \rrbracket \\ \text{Card}(C)=k}} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
 \end{aligned}$$

car il y a $\binom{n}{k}$ parties de $\llbracket 1; n \rrbracket$ de cardinal k .

Exemples :

- On lance n fois une pièce équilibrée. On note X le nombre de "pile" obtenus lors de ces n lancers. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.
En effet, X comptabilise le nombre de succès obtenus lors de la répétition de n fois la même épreuve de Bernoulli de manière indépendante les unes des autres, amenant un succès ("obtenir pile") avec probabilité $\frac{1}{2}$.
- Une urne contenant une proportions p de boules blanches et $1-p$ de boules noires. On note X le nombre de boules blanches obtenues après n tirages successifs avec remise. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.
En effet, X comptabilise le nombre de succès obtenus lors de la répétition de n fois la même épreuve de Bernoulli de manière indépendante les unes des autres, amenant un succès ("obtenir une boule blanche") avec probabilité p .

3.4 Loi image

Soit X une variable aléatoire réelle. Soit ϕ une application à valeurs réelles définie au moins sur $X(\Omega)$.

Alors $Y = \phi \circ X$ est une variable aléatoire sur Ω notée $\phi(X)$. La loi de Y est appelée **loi image**. Elle est donnée pour tout $y \in Y(\Omega)$, par

$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega), \phi(x)=y} P(X = x)$$

car $\{Y = y\} = \bigcup_{x \in X(\Omega), \phi(x)=y} \{X = x\}$ et cette réunion est une réunion disjointe.

Exemples :

1. Si X suit la loi uniforme sur $\llbracket -1; 2 \rrbracket$, quelle est la loi de $Y = X^2$?

On sait que $X(\Omega) = \llbracket -1; 2 \rrbracket$ et

k	-1	0	1	2
$P(X = k)$	1/4	1/4	1/4	1/4

donc $Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$ et

ℓ	0	1	4
$P(Y = \ell)$	1/4	1/2	1/4

car $\{Y = 0\} = \{X = 0\}$, $\{Y = 1\} = \{X = -1\} \cup \{X = 1\}$ et $\{Y = 4\} = \{X = 2\}$.

2. On lance trois fois une pièce équilibrée et on note X le nombre de "pile" obtenus. On pose $Y = |X - 2|$. Donner la loi de Y .

X suit une loi binomiale de paramètre 3 et 1/2 donc $X(\Omega) = \llbracket 0; 3 \rrbracket$ et

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$1/2^3$	$3/2^3$	$3/2^3$	$1/2^3$

Ainsi $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et :

ℓ	0	1	2
$P(Y = \ell)$	$3/2^3$	$1/2$	$1/2^3$

3. On lance deux dés équilibrés et on note X est la somme des chiffres obtenus. On pose $Y = |X - 7|$. Déterminer la loi de X et celle de Y .

$\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket^2$ est muni de la probabilité uniforme et $X(\Omega) = \llbracket 2; 12 \rrbracket$.

Ainsi on a :

$k \in X(\Omega)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = k)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36

Par conséquent, $Y(\Omega) = \llbracket 0; 5 \rrbracket$ et :

i	0	1	2	3	4	5
$P(X = i)$	1/6	5/18	2/9	1/6	1/9	1/18

4 Espérance

Pour connaître une variable aléatoire, on cherche sa loi. Mais pour résumer les caractéristiques de cette loi, on s'intéresse entre autres à un paramètre de position, l'espérance de la variable aléatoire, et à un paramètre de dispersion, sa variance ou son écart-type.

Définition — Soit X une variable aléatoire réelle définie sur Ω . On appelle espérance de X et on note $E(X)$ le nombre réel :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

Remarque : $E(X)$ est la moyenne des valeurs de X pondérées par leur probabilité. En particulier, s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq X(\omega) \leq b$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors $a \leq E(X) \leq b$.

Exemples :

1. Reprenons l'exemple du début du cours : Alice et Bob jouent au dé. Si un numéro pair sort, Bob perd 3€, si 1 ou 5 sortent, Alice perd 5€. Si 3 sort, la partie est nulle. On considère la variable aléatoire X égale au gain algébrique d'Alice. Déterminer l'espérance de X
 $X(\Omega) = \{-5; 0; 3\}$ et

k	-5	0	3
$P(X = k)$	1/3	1/6	1/2

donc $E(X) = -5 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$

2. Soit X une variable aléatoire réelle constante : il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $X(\Omega) = \{a\}$ avec $P(X = a) = 1$. Alors $E(X) = a$
3. Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathbb{U}(0, n)$. Alors

$$E(X) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n+1} = \frac{n}{2}.$$

Proposition. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X \hookrightarrow \mathbb{U}(a, b)$, avec $a, b \in \mathbb{Z}, a < b$. Alors

$$E(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Remarque : Preuve à faire, il est bon de revoir les formules de début d'année sur les sommes.

Proposition. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X \hookrightarrow B(p)$ avec $p \in]0, 1[$. Alors

$$E(X) = p.$$

Preuve : $X(\Omega) = \{0; 1\}$ donc $E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = p$. □

Proposition. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X \hookrightarrow B(n, p)$ avec $n \in \mathbb{N}, p \in]0, 1[$. Alors

$$E(X) = np.$$



Preuve : (à savoir refaire). On sait que $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Donc

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k P(X = k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

$$k \binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

Or $n - k = n - 1 - (k - 1)$ donc

$$k \binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n \times \binom{n-1}{k-1}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell+1} (1-p)^{n-1-\ell} \\ &= np \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{n-1-\ell} \\ &= np \times (p + 1 - p)^{n-1} \\ &= np \end{aligned}$$

□

Proposition. Pour toute variable aléatoire réelle X ,

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}).$$

Preuve : Ω est la réunion disjointe des événements $\{X = x\}$ pour $x \in X(\Omega)$ donc

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in \{X=x\}} X(\omega) P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in \{X=x\}} x P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{\omega \in \{X=x\}} P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} x P(\{X = x\}) \\ &= E(X). \end{aligned}$$

□

Propriétés :

1. Linéarité :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même univers Ω . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(\lambda X) = \lambda E(X)$$

2. Positivité et croissance :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même univers Ω .

- Si $X \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$
- Si $X \leq Y$ alors $E(X) \leq E(Y)$

Preuve : D'après la proposition précédente,

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} (X + Y)(\omega) P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega)) P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) P(\{\omega\}) \\ &= E(X) + E(Y). \end{aligned}$$

Pour les autres points, on peut également utiliser la définition de la notion d'espérance. □

Exemple : On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est notée p . On répète cette même épreuve n fois de manière indépendante. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, notons X_i la variable aléatoire valant 1 si la i ème épreuve amène un succès, 0 sinon. Alors, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p donc $E(X_i) = p$.

Notons X la variable aléatoire donnant le nombre de succès obtenus lors des n répétitions de l'épreuve de Bernoulli. On sait que

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

Or $X = X_1 + \dots + X_n$ donc par linéarité

$$E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = p + \dots + p = np.$$

On retrouve par ce raisonnement l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p .

Théorème de transfert ♥♥♥ — Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω et ϕ une application à valeurs réelles définie sur $X(\Omega)$, alors

$$E(\phi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \phi(x) P(X = x).$$

Preuve : On a

$$E(\phi(X)) = \sum_{\omega \in \Omega} \phi(X)(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} \phi(X(\omega)) P(\{\omega\}).$$

Or Ω est la réunion disjointe des événements $\{X = x\}$ pour $x \in X(\Omega)$. Donc

$$\begin{aligned}
 E(\phi(X)) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in \{X=x\}} \phi(X(\omega))P(\{\omega\}) \\
 &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in \{X=x\}} \phi(x)P(\{\omega\}) \\
 &= \sum_{x \in X(\Omega)} \phi(x) \sum_{\omega \in \{X=x\}} P(\{\omega\}) \\
 &= \sum_{x \in X(\Omega)} \phi(x)p(X = x)
 \end{aligned}$$

□

Remarque : On n'a donc pas besoin d'explicitier la loi image de $\phi(X)$ pour calculer son espérance !

Exemple : Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale de paramètres n et p . Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $Y = e^X$.

$X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ donc d'après le théorème du transfert,

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \sum_{k=0}^n e^k P(X = k) \\
 &= \sum_{k=0}^n e^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (ep)^k (1-p)^{n-k} \\
 &= (1-p+ep)^n.
 \end{aligned}$$

5 Variance et écart-type

On cherche à mesurer la façon dont une variable aléatoire X s'écarte de sa moyenne, c'est-à-dire de son espérance, que l'on note m . On pourrait s'intéresser à $E(X - m)$, mais cette quantité est toujours nulle : $E(X - m) = E(X) - E(m) = m - m = 0$.

La quantité $E(|X - m|)$ mesure effectivement l'écart entre X et son espérance, mais cette quantité possède moins de qualités que celle retenue : $E((X - m)^2)$.

Définition — Soit X une variable aléatoire réelle. La variance et l'écart-type de X sont les réels :

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E((X - E(X))^2) \\
 \sigma(X) &= \sqrt{V(X)}
 \end{aligned}$$

Remarque : $\sigma(X)$ est correctement définie car $V(X) \geq 0$ par positivité de l'espérance.

Proposition.

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Preuve : $V(X) = E((X - m)^2)$ où $m = E(X)$.

$$V(X) = E(X^2 - 2mX + m^2) = E(X^2) - 2mE(X) + m^2E(1) = E(X^2) - 2m^2 + m^2.$$

$$V(X) = E(X^2) - m^2.$$

□

Proposition. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire réelle.

$$V(aX + b) = a^2V(X)$$

$$\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$$

Preuve : On sait que

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

donc

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= E((aX + b - (aE(X) + b))^2) \\ &= E((a(X - E(X)))^2) \\ &= E(a^2(X - E(X))^2) \\ &= a^2V(X) \end{aligned}$$

On en déduit aisément

$$\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$$

□

Remarque : Il n'y a pas de formule pour la variance d'une somme de variables aléatoires de manière générale.

Exemple : Reprenons l'exemple d'Alice et Bob, et calculons l'espérance et la variance de la variable aléatoire X égale au gain algébrique d'Alice. On rappelle que la loi de X est donnée par $X(\Omega) = \{3; 0; -5\}$ et

x	3	0	-5
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

On a vu que $E(X) = -\frac{1}{6}$.

Pour calculer $V(X)$, commençons par calculer $E(X^2)$ à l'aide du théorème du transfert.

$$E(X^2) = 3^2 \times P(X = 3) + 0^2 \times P(X = 0) + (-5)^2 \times P(X = -5) = \frac{9}{2} + \frac{25}{3} = \frac{77}{6}.$$

donc

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{77}{6} - \frac{1}{36} = \frac{461}{36}.$$

5.1 Variances de loi usuelles

- Loi de Bernoulli : Soit $p \in]0; 1[$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli $B(p)$. On a vu que $E(X) = p$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - p^2$$

avec $E(X^2) = 0^2 \times p(X=0) + 1^2 p(X=1) = p$ d'après la formule de transfert. Donc $V(X) = p - p^2$. Ainsi :

$$\boxed{\text{si } X \hookrightarrow B(p), E(X) = p \text{ et } V(X) = p(1-p)}$$

- Loi binomiale : Soit $n \in \mathbb{N}^*, p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(n, p)$. On a vu que $E(X) = np$.

Il reste à calculer $E(X^2)$, mais il est plus simple de calculer $E(X(X-1))$: d'après la formule du transfert,

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^n k(k-1)P(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Soit $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$, alors

$$\begin{aligned} k(k-1) \binom{n}{k} &= k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= k(k-1) \frac{n!}{k(k-1)(k-2)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} \\ &= n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} \\ &= n(n-1) \binom{n-2}{k-2} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^{k+2} (1-p)^{n-k-2} \\ &= n(n-1) p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-2-k} \\ &= n(n-1) p^2 (p+1-p)^{n-2} \\ &= n(n-1) p^2 \end{aligned}$$

Donc $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = n(n-1)p^2 + np$ et

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$$

Finalement,

$$\boxed{\text{si } X \hookrightarrow B(n, p), \text{ alors } E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p)}$$

5.2 Inégalité de Bienaymé & Tchebychev

Théorème — Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω . Notons $m = E(X)$, σ^2 sa variance. Alors pour tout $\epsilon > 0$,

$$P(|X - m| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Preuve : Montrons dans un premier temps l'inégalité de Markov : soit Z une variable aléatoire finie réelle. Pour tout $a > 0$,

$$P(|Z| \geq a) \leq \frac{E(|Z|)}{a}.$$

En effet, $E(\mathbb{1}_{\{|Z| \geq a\}}) = P(|Z| \geq a)$ (car $\mathbb{1}_{\{|Z| \geq a\}}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = P(|Z| \geq a)$) donc

$$aP(|Z| \geq a) = aE(\mathbb{1}_{\{|Z| \geq a\}}) = E(a\mathbb{1}_{\{|Z| \geq a\}}).$$

Or $a\mathbb{1}_{\{|Z| \geq a\}} \geq |Z|$ car pour tout $\omega \in \Omega$, soit $\omega \in \{|Z| \geq a\}$ et dans ce cas, $|Z(\omega)| \geq a$ et ainsi

$$a\mathbb{1}_{\{|Z| \geq a\}}(\omega) = a \leq |Z(\omega)|,$$

soit $\omega \notin \{|Z| \geq a\}$ et dans ce cas,

$$a\mathbb{1}_{\{|Z| \geq a\}}(\omega) = 0 \leq |Z(\omega)|.$$

Par croissance de l'espérance, on en déduit que $E(a\mathbb{1}_{\{|Z| \geq a\}}) \geq E(|Z|)$ donc $aP(|Z| \geq a) \geq E(|Z|)$, et puisque $a > 0$, on en déduit $P(|Z| \geq a) \leq \frac{E(|Z|)}{a}$.

Soit $\epsilon > 0$. Appliquons l'inégalité de Markov avec $a = \epsilon^2$ et $Z = (X - E(X))^2$. Alors

$$P((X - E(X))^2 \geq \epsilon^2) \leq \frac{E((X - E(X))^2)}{\epsilon^2} \text{ donc } P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

car l'événement $\{(X - E(X))^2 \geq \epsilon^2\}$ est égal à l'événement $\{|X - E(X)| \geq \epsilon\}$. $\square$

Exemple : On lance n fois un dé équilibré et on note Y_n la fréquence d'apparition du chiffre 6.

Pour quelles valeurs de n la probabilité que Y soit comprise strictement entre $\frac{1}{6} - 1\%$ et $\frac{1}{6} + 1\%$ est-elle strictement supérieure à 0,95 ?

On cherche n tel que

$$P(|Y_n - \frac{1}{6}| < 1\%) > 0,95$$

ce qui revient à chercher n tel que

$$P(|Y_n - \frac{1}{6}| \geq 1\%) \leq 0,05.$$

Notons X_n le nombre de 6 obtenus lors de ces n lancers. Alors

$$X_n \hookrightarrow B\left(n, \frac{1}{6}\right)$$

car X_n représente le nombre de succès obtenus lors de la répétition de manière indépendante de n fois la même épreuve de Bernoulli (lancer d'un dé équilibré) dont la probabilité de succès "obtenir un 6" est $\frac{1}{6}$.

De plus, $Y_n = \frac{X_n}{n}$, donc

$$E(Y_n) = \frac{E(X_n)}{n} = \frac{1}{6} \text{ et } V(Y_n) = \frac{V(X_n)}{n^2} = \frac{5n/36}{n^2} = \frac{5}{36n}.$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P(|Y_n - E(Y_n)| \geq 1\%) \leq \frac{V(Y_n)}{1\%^2} \text{ donc } P\left(|Y_n - \frac{1}{6}| \geq 1\%\right) \leq \frac{5 \times 10^4}{36n}.$$

Il suffit donc que $\frac{5 \times 10^4}{36n} \leq 0,05$ c'est-à-dire que $n \geq \frac{10^6}{36}$ pour pouvoir affirmer que

$$P\left(|Y_n - \frac{1}{6}| < 1\%\right) > 0,95.$$

6 Couples de variables aléatoires

6.1 Loi conjointe, lois marginales

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles sur Ω . Alors

$$\begin{aligned} (X, Y) : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On appelle loi conjointe la loi $P_{(X,Y)}$ de cette variable aléatoire.

Les lois P_X et P_Y sont appelées lois marginales.

Remarque : L'univers Ω étant fini, les ensembles $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ le sont aussi. Alors $P_{(X,Y)}$ est entièrement déterminée par la donnée de $P_{(X,Y)}(x, y)$ pour tout $(x, y) \in (X, Y)(\Omega)$, où

$$P_{(X,Y)}((x, y)) = P((X = x) \cap (Y = y))$$

Exemple : Une urne contient 7 boules (2 bleues, 3 blanches, 2 rouges). On tire simultanément 3 boules de l'urne. On note X le nombre de boules bleues obtenues et Y de boules blanches obtenues. Déterminer la loi du couple (X, Y) .

$X(\Omega) = \llbracket 0; 2 \rrbracket$ et $Y(\Omega) = \llbracket 0; 3 \rrbracket$. Plus précisément,

$$(X, Y)(\Omega) = \{(x, y) \in \llbracket 0; 2 \rrbracket \times \llbracket 0; 3 \rrbracket \mid 3 - (x + y) \in \llbracket 0; 2 \rrbracket\}$$

car la donnée des valeurs de $(X(\omega), Y(\omega))$ détermine l'issue ω dans laquelle on a tiré $X(\omega)$ boules bleues, $Y(\omega)$ boules blanches, et $3 - (X(\omega) + Y(\omega))$ boules rouges.

Par conséquent, pour tous $k \in \llbracket 0; 2 \rrbracket, l \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$ tels que $3 - (k + l) \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$,

$$P_{(X,Y)}(k, l) = \frac{\binom{2}{k} \times \binom{3}{l} \times \binom{2}{3-(k+l)}}{\binom{7}{3}}$$

Notons les résultats dans un tableau :

ℓ/k	0	1	2	$P(Y = \ell)$
0	0	2/35	2/35	4/35
1	3/35	12/35	3/35	18/35
2	6/35	6/35	0	12/35
3	1/35	0	0	1/35
$P(X = k)$	2/7	4/7	1/7	1

Remarque : $P(X = k) = \sum_{l=0}^3 P(X = k, Y = l)$ car $\{(Y = 0), (Y = 1), (Y = 2), (Y = 3)\}$ est un système complet d'événements. Par conséquent, la connaissance de la loi du couple permet d'obtenir les lois marginales :

Proposition. Les lois marginales sont données pour tout $x \in X(\Omega)$ et pour tout $y \in Y(\Omega)$ par :

$$P_X(\{x\}) = P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x \cap Y = y)$$

$$P_Y(\{y\}) = P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x \cap Y = y)$$

Remarque : Attention ! La connaissance des lois marginales ne permet pas de connaître la loi conjointe

Exemple : On lance 2 dés : un dé rouge et un dé bleu. On note

- X le résultat du dé rouge,
- Y le résultat du dé bleu, et
- $Z = 7 - X$

Donner les lois conjointes et marginales de (X, Y) et (X, Z) .

Ici, $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket$ muni de la probabilité uniforme. $X(\Omega) = \llbracket 1; 6 \rrbracket = Y(\Omega) = Z(\Omega)$:

Y/X	1	2	3	4	5	6	$P(Y = \ell)$
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
$P(X = k)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

Z/X	1	2	3	4	5	6	$P(Z = \ell)$
1	0	0	0	0	0	1/6	1/6
2	0	0	0	0	1/6	0	1/6
3	0	0	0	1/6	0	0	1/6
4	0	0	1/6	0	0	0	1/6
5	0	1/6	0	0	0	0	1/6
6	1/6	0	0	0	0	0	1/6
$P(X = k)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

On remarque que dans cet exemple, les couples (X, Y) et (X, Z) ont les mêmes lois marginales mais pas les mêmes lois conjointes.

6.2 Lois conditionnelles

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles sur Ω . Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x) \neq 0$, on définit la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ en posant pour tout $y \in Y(\Omega)$,

$$P_{(X=x)}(Y = y) = \frac{P(Y = y \cap X = x)}{P(X = x)}$$

On trouve aussi la notation $P(Y = y|X = x)$

Proposition. $P_{(X=x)}$ est une probabilité : C'est la loi de Y dans l'espace probabilisé $(\Omega, P_{(X=x)})$

Exemple de l'urne : On a montré que :

Y/X	0	1	2	$P(Y = \ell)$
0	0	2/35	2/35	4/35
1	3/35	12/35	3/35	18/35
2	6/35	6/35	0	12/35
3	1/35	0	0	1/35
$P(X = k)$	2/7	4/7	1/7	1

La loi conditionnelle $P_{(X=1)}$ est donnée par :

ℓ	0	1	2	3
$P_{(X=1)}(Y = \ell)$	1/10	3/5	3/10	0

On définit de même la loi de X sachant l'événement $(Y = y)$ (où $y \in Y(\Omega)$ est tel que $P(Y = y) \neq 0$)

6.3 Indépendance

Définition — Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω . On dit que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes lorsque pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, les événements $(X = a)$ et $(Y = b)$ sont indépendants, c'est-à-dire lorsque pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$P(X = a \cap Y = b) = P(X = a)P(Y = b).$$

Exemples :

- Cf. exemple précédent avec les lancers de dé. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors que les variables aléatoires X et Z ne sont pas indépendantes.
- Dans l'exemple de l'urne, X et Y ne sont pas indépendantes.

Proposition. Soit X, Y deux variables aléatoires réelles. Supposons X et Y indépendantes. Alors pour tout $A \subset X(\Omega)$, pour tout $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants. Donc pour tous $A \subset X(\Omega)$, $B \subset Y(\Omega)$,

$$P(X \in A \cap Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

Exemple du lancer de 2 dés : Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, les événements A "X est paire" et B "Y est multiple de 3" sont indépendants.

$$\text{Donc } P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Proposition. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes. Soient f et g deux applications à valeurs réelles, l'application f étant définie au moins sur $X(\Omega)$ et l'application g étant définie au moins sur $Y(\Omega)$.

Alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Exemple : On reprend l'exemple du lancer des deux dés. X est la variable aléatoire donnant le chiffre du 1er dé, Y celle donnant le chiffre du 2ème dé et $Z = 7 - X$. On a vu que X et Y sont indépendantes. $Z = f(X)$, avec $f : x \mapsto 7 - x$. Donc Z et Y sont indépendantes.

Proposition. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. Alors

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Preuve : Posons $Z = XY$ et $\mathcal{E} = \{xy | x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)\}$. Pour tout $z \in \mathcal{E}$, posons

$$\mathcal{E}_z = \{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) | xy = z\}.$$

Alors

$$X(\Omega) \times Y(\Omega) = \bigcup_{z \in \mathcal{E}} \mathcal{E}_z$$

et la réunion est disjointe.

On remarque que $Z(\Omega) \subset \mathcal{E}$ car

$$Z(\Omega) = \{X(\omega)Y(\omega) | \omega \in \Omega\} \subset \{X(\omega)Y(\omega') | \omega, \omega' \in \Omega\} = \mathcal{E}.$$

De plus, pour tout $z \in \mathcal{E}$, si $z \in Z(\Omega)$,

$$\{Z = z\} = \bigcup_{(x,y) \in \mathcal{E}_z} \{X = x \cap Y = y\}$$

et la réunion est disjointe, donc

$$P(Z = z) = \sum_{(x,y) \in \mathcal{E}_z} P(X = x \cap Y = y) = \sum_{(x,y) \in \mathcal{E}_z} P(X = x)P(Y = y)$$

car les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Enfin, pour tout $z \in \mathcal{E}$, si $z \notin Z(\Omega)$, $p(Z = z) = 0$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} E(XY) &= E(Z) \\ &= \sum_{z \in Z(\Omega)} zP(Z = z) \\ &= \sum_{z \in \mathcal{E}} zP(Z = z) \\ &= \sum_{z \in \mathcal{E}} z \sum_{(x,y) \in \mathcal{E}_z} P(X = x \cap Y = y) \\ &= \sum_{z \in \mathcal{E}} \sum_{(x,y) \in \mathcal{E}_z} zP(X = x)P(Y = y) \\ &= \sum_{z \in \mathcal{E}} \sum_{(x,y) \in \mathcal{E}_z} xyP(X = x)P(Y = y) \\ &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyP(X = x)P(Y = y) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xyP(X = x)P(Y = y) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) \sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y = y) \\ &= E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Remarque : La condition $E(XY) = E(X)E(Y)$ est une condition nécessaire pour que les variables aléatoires X et Y soient indépendantes. Mais cette condition n'est pas suffisante, cf contre-exemple en exercice !

6.4 Indépendance mutuelle

Définition — Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \dots, X_N$ des variables aléatoires réelles. On dit que $X_1, \dots, X_N$ sont mutuellement indépendantes lorsque pour tout $(x_1, \dots, x_N) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_N(\Omega)$,

$$P(X = x_1 \cap \dots \cap X_N = x_N) = \prod_{i=1}^N P(X_i = x_i)$$

Proposition. Soit $X_1, \dots, X_N$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes. Alors pour tout $(A_1, \dots, A_N) \subset X_1(\Omega) \times \dots \times X_N(\Omega)$, les événements $(X_k \in A_k)$ sont mutuellement indépendants.

Théorème — Soit $p \in]0, 1[$, $N \in \mathbb{N}^*$ Soit $X_1, \dots, X_N$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi de Bernoulli $B(p)$. Alors $X_1 + \dots + X_N$ suit la loi binomiale $B(N, p)$.

Preuve : Cf définition de la loi binomiale et la remarque qui la suit. $\square$

Remarque : On montre de manière classique que la variance d'une somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes est donnée par la somme des variances de ces variables aléatoires (cf exercice pour la variance d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes).

On retrouve ainsi la variance d'une loi binomiale : Soit $X_1, \dots, X_N$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi de Bernoulli $B(p)$. Posons $X = X_1 + \dots + X_N$. D'après ce qui précède, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(N, p)$.

Puisque les variables aléatoires X_i sont mutuellement indépendantes,

$$V(X) = V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = np(1 - p)$$

car si $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $V(Y) = p(1 - p)$.