

Chapitre 18 - Intégration sur un segment

Comment définir correctement l'intégrale d'une fonction f sur un segment $[a, b]$? Comme l'aire de la figure délimitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$? Mais quel sens donner à la notion d'aire ?

On peut donner une première approximation de l'aire d'une figure par la somme de figures plus élémentaires (ici des rectangles) l'approchant.

C'est l'idée retenue ici : on va "approcher" une fonction continue f par une fonction "en escalier" (dont il sera facile de définir l'intégrale), puis définir à l'aide de cette approximation l'intégrale de la fonction f .

Première partie

Intégration d'une fonction escalier

1 Subdivisions

Définition — Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On appelle subdivision du segment $[a, b]$ toute suite finie $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de réels vérifiant : $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision du segment $[a, b]$. On dit que

- $x_0, \dots, x_n$ sont les points de la subdivision σ ,
- $\{x_0, \dots, x_n\}$ est le support de la subdivision σ , et on le note $\text{supp}(\sigma)$.

On dit que la subdivision σ est régulière lorsqu'il existe $h > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i - x_{i-1} = h.$$

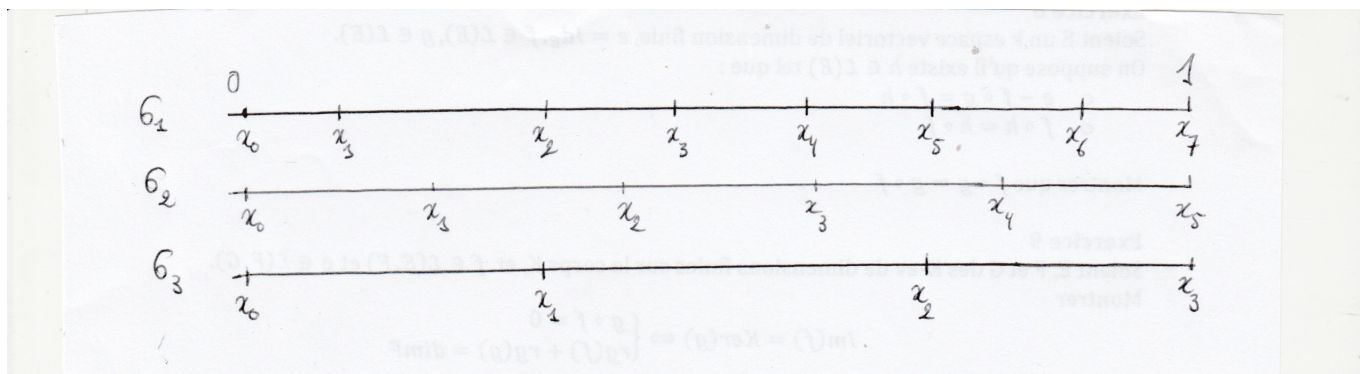
Si c'est le cas, on dit que h est le pas de la subdivision et on a $h = \frac{b-a}{n}$. Enfin, dans ce cas, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$,

$$x_i = a + ih = a + i \frac{b-a}{n}.$$

Remarque : Choisir une subdivision d'un segment revient à le couper en plusieurs morceaux.

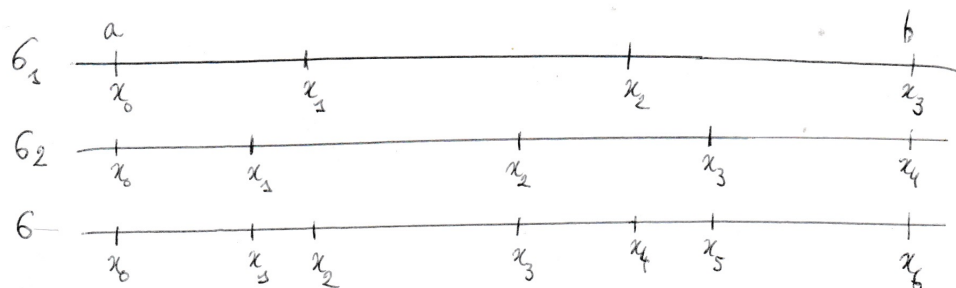
Définition — Soit $b, a \in \mathbb{R}$ tels que $b > a$. Soit σ, σ' deux subdivisions du segment $[a, b]$. On dit que σ est plus fine que σ' lorsque $\text{supp}(\sigma') \subset \text{supp}(\sigma)$ c'est-à-dire lorsque tout point de σ' est un point de σ .

Exemple : Dans cet exemple, σ_1 , σ_2 et σ_3 sont trois subdivisions du segment $[0, 1]$. La subdivision σ_2 est régulière, de pas 0,2. La subdivision σ_1 est plus fine que la subdivision σ_3 .



Proposition. Soit σ_1, σ_2 deux subdivisions de $[a, b]$. Alors il existe une subdivision σ de $[a, b]$ plus fine que σ_1 et σ_2 .

Preuve. Il suffit de noter σ la subdivision de support $\text{supp}(\sigma_1) \cup \text{supp}(\sigma_2)$. Alors clairement, σ est plus fine que σ_1 et σ_2 .



□

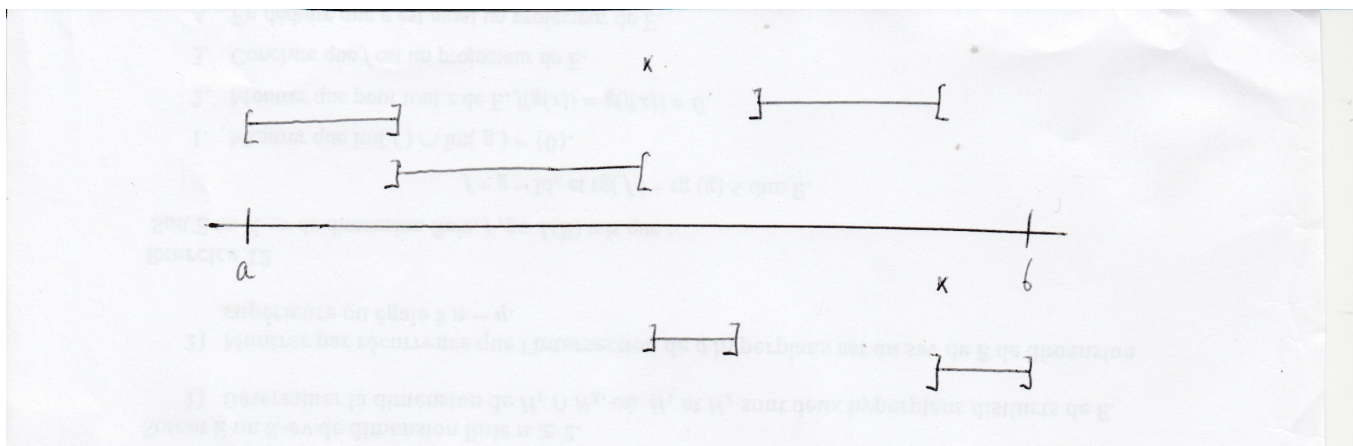
2 Fonctions en escalier

Définition — Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est une fonction en escalier sur $[a, b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, f est constante sur $]x_{i-1}, x_i[$.

Si f est une fonction en escalier sur $[a, b]$, on appelle subdivision adaptée à f toute subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ pour laquelle pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, f est constante sur $]x_{i-1}, x_i[$.

On note $\mathcal{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.



Exemples : Les fonctions suivantes sont en escaliers :

- Les fonctions constantes sur un segment,
- La restriction de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ à n'importe quel segment.

Remarque : Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$. Soit σ une subdivision adaptée à f . Alors toute subdivision σ' plus fine que σ est également adaptée à f .

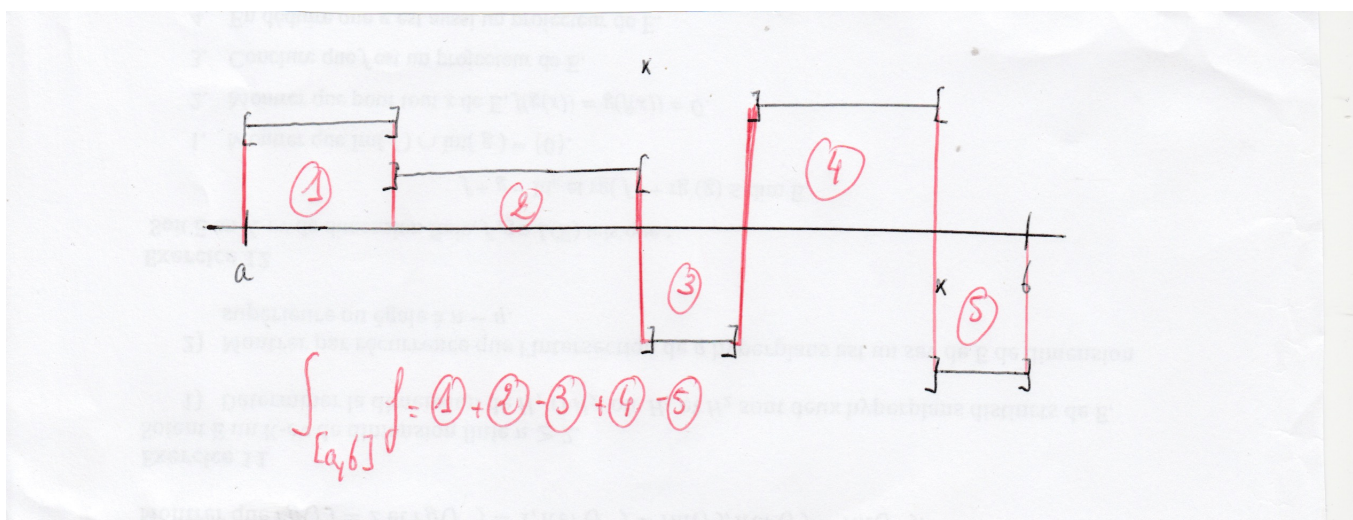
Pour les fonctions en escalier, il est facile de définir l'intégrale comme étant "l'aire sous la courbe" : il suffit de faire la somme des aires de rectangles, comptées de manière algébrique (avec une aire négative si le rectangle est "sous l'axe des abscisses").

Proposition et définition — Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f \in \mathcal{E}([a, b])$. Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f . Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, notons c_i la valeur de f sur $]x_{i-1}, x_i[$.

Alors le nombre réel $\sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1})$ ne dépend pas du choix de la subdivision σ adaptée à f . On l'appelle intégrale de f sur $[a, b]$, et on le note $\int_{[a,b]} f$.

Par définition, on a donc

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}).$$



3 Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

Proposition. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soient $f, g \in \mathcal{E}([a, b])$, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f + \lambda g$ est en escalier sur $[a, b]$.

Preuve : Il suffit de considérer une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ adaptée à la fois à f et à g . Alors pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, f et g sont constantes sur $[x_{i-1}, x_i]$ donc $f + \lambda g$ l'est également pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Proposition. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soient $f, g \in \mathcal{E}([a, b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- (linéarité) $\int_{[a,b]} (f + \lambda g) = \int_{[a,b]} f + \lambda \int_{[a,b]} g$
- (positivité) si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$.
- (croissance) si $f \geq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$.

Démonstration : Soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à la fois à f et g . Alors σ est adaptée à $f + \lambda g$. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, notons c_i la valeur de f sur $]x_{i-1}; x_i[$, et d_i celle de g . Alors $f + \lambda g$ vaut $c_i + \lambda d_i$ sur $]x_{i-1}, x_i[$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} (f + \lambda g) &= \sum_{i=1}^n (c_i + \lambda d_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (c_i(x_i - x_{i-1}) + \lambda d_i(x_i - x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) + \lambda \sum_{i=1}^n d_i(x_i - x_{i-1}) = \int_{[a,b]} f + \lambda \int_{[a,b]} g \end{aligned}$$

Si on suppose $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $c_i \geq 0$, et puisque $x_i - x_{i-1} > 0$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$ car c'est une somme de termes positifs.

Enfin, si on suppose $f \geq g$ sur $[a, b]$, alors $f - g$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$ telle que $f - g \geq 0$ sur $[a, b]$, donc d'après la positivité, $\int_{[a,b]} (f - g) \geq 0$. Or, par linéarité, $\int_{[a,b]} (f - g) = \int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} g$. On obtient donc $\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$. $\square$

Deuxième partie

Intégration d'une fonction continue sur un segment

1 Approximation des fonctions continues par des fonctions en escalier

Proposition. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ en escalier sur $[a, b]$ vérifiant :

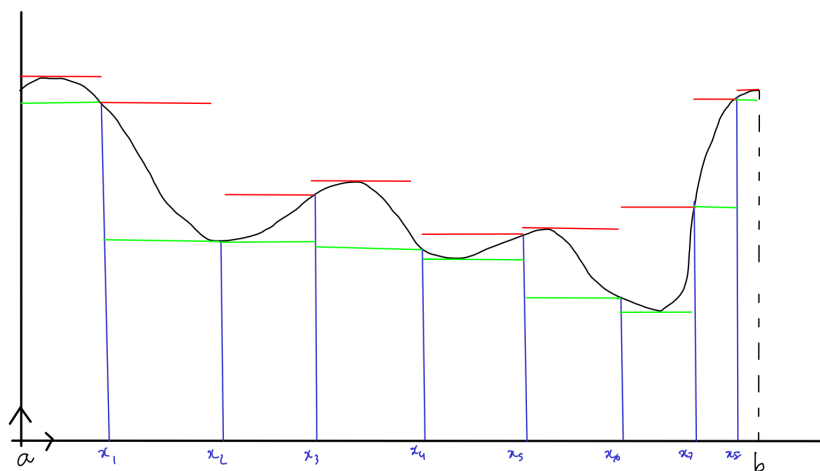
1. $\forall x \in [a, b], \phi_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \psi_\varepsilon(x)$
2. $\forall x \in [a, b], 0 \leq \psi_\varepsilon(x) - \phi_\varepsilon(x) \leq \varepsilon$

Preuve : On admet ce résultat dans le cas général.

Traitons le cas où f est lipschitzienne sur $[a, b]$: il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Posons $h = \frac{\varepsilon}{L}$ et notons $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ la subdivision régulière de pas h (de $[a, b]$).



Notons ϕ_ε et ψ_ε les fonctions en escalier définies sur $[a, b]$ de la manière suivante : soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. La fonction f étant continue sur le segment $[x_{i-1}, x_i]$, elle atteint un minimum c_i et un maximum d_i sur ce segment. On pose alors $\phi_\varepsilon(x) = c_i$ et $\psi_\varepsilon(x) = d_i$ pour tout $x \in [x_{i-1}, x_i[$. Enfin, on pose $\phi_\varepsilon(b) = f(b)$ et $\psi_\varepsilon(b) = f(b)$.

Par construction, pour tout $x \in [a, b]$, $\phi_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \psi_\varepsilon(x)$.

Enfin, soit $x \in [a, b]$.

Si $x = b$, $\psi_\varepsilon(x) - \phi_\varepsilon(x) = 0 \leq \varepsilon$.

Si $x \neq b$, il existe un unique $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $x \in [x_{i-1}, x_i[$. Le minimum de f sur le segment $[x_{i-1}, x_i]$ est atteint en un point noté a_i , et son maximum est atteint en un point noté b_i . Alors par définition, $\phi_\varepsilon(x) = f(a_i)$ et $\psi_\varepsilon(x) = f(b_i)$. Donc

$$\psi_\varepsilon(x) - \phi_\varepsilon(x) = f(b_i) - f(a_i) \leq L|b_i - a_i| \leq Lh = \varepsilon$$

car f est L -lipschitzienne et $|b_i - a_i| \leq h$ car $b_i, a_i \in [x_{i-1}, x_i]$ et la longueur du segment $[x_{i-1}, x_i]$ est h .

Par conséquent,

$$\psi_\varepsilon(x) - \phi_\varepsilon(x) \leq \varepsilon$$

pour tout $x \in [a, b]$.

□

2 Intégrale d'une fonction continue

Théorème — Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

Notons

$$\mathcal{I}^+ = \left\{ \int_{[a,b]} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}([a, b]), \psi \geq f \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}^- = \left\{ \int_{[a,b]} \phi \mid \phi \in \mathcal{E}([a, b]), \phi \leq f \right\}.$$

Alors $\mathcal{I}^+$ admet une borne inférieure, $\mathcal{I}^-$ admet une borne supérieure, et

$$\inf \mathcal{I}^+ = \sup \mathcal{I}^-.$$

Ce nombre réel est appelé intégrale de f sur $[a, b]$ et est noté $\int_{[a,b]} f$: par définition, on a donc

$$\int_{[a,b]} f = \inf \mathcal{I}^+ = \sup \mathcal{I}^-.$$

Preuve : 1. Montrons dans un premier temps que $\mathcal{I}^+$, respectivement $\mathcal{I}^-$, admet une borne inférieure, respectivement supérieures en montrant que c'est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée, respectivement majorée.

La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$, donc est bornée sur ce segment. Soit m un minorant de f sur $[a, b]$, et M un majorant de f sur $[a, b]$. Considérons les fonctions φ_m et ψ_M définies sur $[a, b]$ par $\varphi_m(x) = m$, $\psi_M(x) = M$. Les fonctions φ_m et ψ_M sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$ (car elles sont constantes sur $[a, b]$), et on a $\varphi_m \leq f \leq \psi_M$. On en conclut alors que

$$\int_{[a,b]} \varphi_m \in \mathcal{I}^- \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} \psi_M \in \mathcal{I}^+,$$

ce qui montre que les ensembles $\mathcal{I}^-$ et $\mathcal{I}^+$ sont non vides.

Montrons maintenant que $\mathcal{I}^+$ est minorée et que $\mathcal{I}^-$ est majorée.

Soit $\ell \in \mathcal{I}^+$: il existe une fonction ψ en escalier sur $[a, b]$ telle que $\ell = \int_{[a,b]} \psi$ et $\psi \geq f$.

Comme $f \geq \varphi_m$, on a donc $\psi \geq \varphi_m$, et ces deux fonctions étant en escalier sur $[a, b]$, la croissance de l'intégrale d'une fonction en escalier donne :

$$\int_{[a,b]} \psi \geq \int_{[a,b]} \varphi_m \quad \text{c'est-à-dire} \quad \ell \geq \int_{[a,b]} \varphi_m,$$

ce qui montre que $\mathcal{I}^+$ est minorée.

On montre de même que $\mathcal{I}^-$ est majorée.

Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{I}^+$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée, donc cet ensemble admet une borne inférieure. De même, $\mathcal{I}^-$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, donc cet ensemble admet une borne supérieure.

2. Montrons enfin que $\inf \mathcal{I}^+ = \sup \mathcal{I}^-$. Pour cela, on procède par double inégalité.

Soient φ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$, telles que $\varphi \leq f$ et $f \leq \psi$. On a alors $\varphi \leq \psi$, et la croissance de l'intégrale des fonctions en escalier donne : $\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$. Cette inégalité étant vraie pour toutes les fonctions ψ en escalier avec $\psi \geq f$, alors $\int_{[a,b]} \varphi$ minore $\mathcal{I}^+$, donc $\int_{[a,b]} \varphi \leq \inf \mathcal{I}^+$.

Cette dernière inégalité étant vraie pour toute fonction φ en escalier avec $\varphi \leq f$, cela montre que $\inf \mathcal{I}^+$ majore $\mathcal{I}^-$, d'où l'on conclut que

$$\sup \mathcal{I}^- \leq \inf \mathcal{I}^+.$$

Montrons maintenant l'inégalité réciproque. Pour cela, on utilise le théorème d'approximation des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier.

Considérons un réel $\varepsilon > 0$ et deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ φ_ε et ψ_ε telles que $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$ et $\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon \leq \varepsilon$.

On a donc en particulier, $\psi_\varepsilon \leq \varphi_\varepsilon + \varepsilon$, et ces fonctions étant en escalier, la croissance de l'intégrale donne :

$$\int_{[a,b]} \psi_\varepsilon \leq \int_{[a,b]} (\varphi_\varepsilon + \varepsilon) \quad \text{ou encore} \quad \int_{[a,b]} \psi_\varepsilon \leq \int_{[a,b]} \varphi_\varepsilon + \varepsilon(b-a)$$

Or, ψ_ε est une fonction en escalier telle que $\psi_\varepsilon \geq f$, donc

$$\int_{[a,b]} \psi_\varepsilon \in \mathcal{I}^+, \quad \text{donc} \quad \int_{[a,b]} \psi_\varepsilon \geq \inf \mathcal{I}^+.$$

De même, $\int_{[a,b]} \varphi_\varepsilon \leq \sup \mathcal{I}^-$. On obtient donc :

$$\inf \mathcal{I}^+ \leq \sup \mathcal{I}^- + \varepsilon(b-a)$$

Cette inégalité étant vraie pour tout réel $\varepsilon > 0$, on obtient, en faisant tendre ε vers 0 par valeurs supérieures,

$$\inf \mathcal{I}^+ \leq \sup \mathcal{I}^-.$$

Finalement, on a montré par double inégalité que

$$\inf \mathcal{I}^+ = \sup \mathcal{I}^-.$$

□

3 Propriétés de l'intégrale

3.1 Linéarité

Proposition. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_{[a,b]} (f + \lambda g) = \int_{[a,b]} f + \lambda \int_{[a,b]} g$$

Preuve : Soient ψ_1 et ψ_2 deux fonctions en escalier telles que $f \leq \psi_1$ et $g \leq \psi_2$. Alors $\psi_1 + \psi_2$ est une fonction en escalier telle que $f + g \leq \psi_1 + \psi_2$, donc par définition de l'intégrale de $f + g$,

$$\int_{[a,b]} (f + g) \leq \int_{[a,b]} (\psi_1 + \psi_2).$$

Par linéarité de l'intégrale d'une fonction en escalier, on en déduit alors

$$\int_{[a,b]} (f + g) \leq \int_{[a,b]} \psi_1 + \int_{[a,b]} \psi_2$$

ou encore :

$$\int_{[a,b]} (f + g) - \int_{[a,b]} \psi_2 \leq \int_{[a,b]} \psi_1$$

et cette dernière inégalité est vraie pour toute fonction ψ_1 en escalier telle que $f \leq \psi_1$. Or, par définition de l'intégrale de f ,

$$\int_{[a,b]} f = \inf \left\{ \int_{[a,b]} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}([a, b]), \psi \geq f \right\}.$$

On en déduit que :

$$\int_{[a,b]} (f + g) - \int_{[a,b]} \psi_2 \leq \int_{[a,b]} f$$

et cette dernière inégalité se ré-écrit :

$$\int_{[a,b]} (f + g) - \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} \psi_2$$

et est valable pour toute fonction ψ_2 en escalier telle que $\psi_2 \geq g$, donc, par définition de l'intégrale de g , on obtient :

$$\int_{[a,b]} (f + g) - \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$$

ou encore

$$\int_{[a,b]} (f + g) \leq \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g$$

L'inégalité réciproque s'obtient de la même manière, en considérant deux fonctions en escalier φ_1 et φ_2 telles que $\varphi_1 \leq f$ et $\varphi_2 \leq g$. On en déduit alors l'égalité par double inégalité.

Considérons maintenant une fonction en escalier ψ telle que $\psi \geq \lambda f$. Distinguons suivant le signe de λ :

— si $\lambda > 0$: alors $\frac{1}{\lambda}\psi$ est une fonction en escalier et $\frac{1}{\lambda}\psi \geq f$, donc on peut écrire :

$$\frac{1}{\lambda} \int_{[a,b]} \psi = \int_{[a,b]} \frac{1}{\lambda} \psi \geq \int_{[a,b]} f$$

En multipliant par $\lambda > 0$, on obtient alors :

$$\int_{[a,b]} \psi \geq \lambda \int_{[a,b]} f$$

et cette inégalité est vraie pour toute fonction ψ en escalier telle que $\psi \geq \lambda f$, donc, par définition de l'intégrale de λf :

$$\int_{[a,b]} \lambda f \geq \lambda \int_{[a,b]} f$$

De la même manière, en considérant une fonction φ en escalier telle que $\varphi \leq \lambda f$, on obtient $\int_{[a,b]} \lambda f \leq \lambda \int_{[a,b]} f$, d'où l'on déduit :

$$\int_{[a,b]} \lambda f = \lambda \int_{[a,b]} f$$

— si $\lambda < 0$: alors $\frac{1}{\lambda}\psi$ est une fonction en escalier et $\frac{1}{\lambda}\psi \leq f$, donc, de même que précédemment, on obtient :

$$\frac{1}{\lambda} \int_{[a,b]} \psi = \int_{[a,b]} \frac{1}{\lambda} \psi \leq \int_{[a,b]} f$$

En multipliant par $\lambda < 0$, on obtient alors

$$\int_{[a,b]} \psi \geq \lambda \int_{[a,b]} f$$

et on conclut alors de la même manière que précédemment. L'inégalité réciproque se démontre de la même façon.

— si $\lambda = 0$: alors le résultat est clairement vrai.

□

3.2 Positivité et croissance

Théorème — Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$

Preuve : Supposons $f \geq 0$ sur $[a, b]$. Notons ϕ la fonction nulle sur $[a, b]$. Alors $\phi \in \mathcal{E}([a, b])$ et $\phi \leq f$. Par définition de $\int_{[a,b]} f$, $\int_{[a,b]} \phi \leq \int_{[a,b]} f$.

Or $\int_{[a,b]} \phi = 0$ car $\phi = 0$, d'où le résultat.

□

Théorème (corollaire) — Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Si $f \geq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$

Preuve : Supposons $f \geq g$ sur $[a, b]$. Alors $f - g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et $f - g \geq 0$ sur $[a, b]$, donc : $\int_{[a,b]} (f - g) \geq 0$.

Par linéarité : $\int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} g \geq 0$, donc $\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$.

□

Exemple : Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \int_{[0,1]} e^{xt^2} dt$$

est croissante sur $\mathbb{R}$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. Pour tout $t \in [0, 1]$, $t^2 \geq 0$ donc

$$t^2 x \leq t^2 y.$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit que $e^{xt^2} \leq e^{yt^2}$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Les fonctions $g_x : t \mapsto e^{xt^2}$ et $g_y : t \mapsto e^{yt^2}$ sont continues sur le segment $[0, 1]$ et vérifient $g_x \leq g_y$.

Par croissance de l'intégrale sur un segment, on en déduit

$$\int_{[0,1]} g_x \leq \int_{[0,1]} g_y \text{ donc } f(x) \leq f(y).$$

La fonction f est donc croissante sur $[0, 1]$.

3.3 Stricte positivité ♡

Théorème — Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. On suppose $f \geq 0$ sur $[a, b]$. Alors

$$\int_{[a,b]} f = 0 \iff f = 0.$$

Remarques :

- Attention aux hypothèses !
- En d'autres termes, si f est continue, positive sur $[a, b]$ et si f n'est pas la fonction nulle, alors $\int_{[a,b]} f > 0$

Preuve : 1. $f = 0 \implies \int_{[a,b]} f = 0$

2. Supposons que f n'est pas la fonction nulle sur $[a, b]$. Montrons que $\int_{[a,b]} f \neq 0$.

Puisque $f \neq 0$, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$, et puisque $f \geq 0$, alors $f(x_0) > 0$.

La fonction f étant continue $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ donc :

$$\forall \epsilon > 0, \exists h > 0, \forall x \in [a, b], \quad |x - x_0| \leq h \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon.$$

Prenons $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, alors il existe $h > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b] \cap [x_0 - h, x_0 + h]$, on ait $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{2}f(x_0)$. En particulier, $f(x) \geq \frac{1}{2}f(x_0)$ pour tout $x \in [a, b] \cap [x_0 - h, x_0 + h]$.

Considérons la fonction $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur $[a, b]$ par :

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}f(x_0) & \text{si } |x - x_0| \leq h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors ϕ est une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $\phi \leq f$, donc

$$\int_{[a,b]} \phi \leq \int_{[a,b]} f.$$

Or

$$\int_{[a,b]} \phi = \frac{1}{2}f(x_0) \times 2h \text{ si } x_0 \in]a, b[,$$

et

$$\int_{[a,b]} \phi = \frac{1}{2}f(x_0) \times h \text{ si } x_0 \in \{a, b\}.$$

Dans tous les cas, $\int_{[a,b]} \phi > 0$ donc $\int_{[a,b]} f > 0$.

□

Exemple : Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \int_{[0,1]} e^{xt^2} dt$$

est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Pour tout $t \in [0, 1]$, $t^2 \geq 0$ donc

$$t^2 x \leq t^2 y.$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit que $e^{xt^2} \leq e^{yt^2}$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Les fonctions $g_x : t \mapsto e^{xt^2}$ et $g_y : t \mapsto e^{yt^2}$ sont continues sur le segment $[0, 1]$ et vérifient $g_x \leq g_y$. Donc $g_y - g_x$ est une fonction continue et positive sur le segment $[0, 1]$. De plus, cette fonction n'est pas la fonction nulle car par exemple, $g_y(1) - g_x(1) = e^y - e^x > 0$ par stricte croissance de la fonction exponentielle.

Par stricte positivité de l'intégrale sur un segment, on en déduit

$$\int_{[0,1]} (g_y - g_x) > 0 \text{ donc } \int_{[0,1]} g_y > \int_{[0,1]} g_x.$$

Par conséquent, $f(x) < f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$: la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3.4 Relation de Chasles

Notation : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, $a, b \in I$.

$$\text{On pose } \int_a^b f(t)dt = \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\int_{[b,a]} f & \text{si } b < a \end{cases}$$

Conséquence : $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$ pour tous $a, b \in I$.

Remarque : Les propriétés de l'intégrale concernant l'ordre (positivité, croissance et stricte positivité) ne sont valables que si les bornes de l'intégrale sont "dans le bon sens". En revanche, la linéarité de l'intégrale est valable quelles que soient les bornes de l'intégrale.

Théorème : — Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Soit $a, b, c \in I$.
Alors $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

Preuve : Non détaillée : on le montre dans un premier temps dans le cas où $a < b < c$ (cas où les trois intégrales écrites sont des intégrales sur un segment : les bornes sont dans le "bon sens"), en revenant à la définition de l'intégrale sur un segment.

Puis on se ramène à ce cas dans tous les autres cas : par exemple, si $a < b < c$, d'après la relation de Chasles démontrée sur des segments,

$$\int_{[a,c]} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f$$

donc

$$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_{[a,c]} f - \int_{[b,c]} f = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f.$$

□

3.5 Inégalité de la moyenne

Théorème ♥ — Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. On suppose que f est bornée sur I : il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in I$, $m \leq f(x) \leq M$.
Alors pour tous $a, b \in I$, si $a \leq b$,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$$

Preuve. : Il suffit d'utiliser la croissance de l'intégrale sur un segment : les fonctions $g : t \mapsto m$, f et $h : t \mapsto M$ sont continues sur le segment $[a, b]$ et $g \leq f \leq h$. Alors

$$\int_{[a,b]} g \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} h.$$

Or g et h sont des fonctions constantes sur le segment $[a, b]$, ce sont donc des fonctions en escalier sur $[a, b]$. Par conséquent,

$$\int_{[a,b]} g = m(b-a) \text{ et } \int_{[a,b]} h = M(b-a),$$

ce qui établit le résultat.

□

Théorème — Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Alors

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Preuve. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| = \max(\alpha, -\alpha)$. Pour établir l'inégalité cherchée, il suffit donc de montrer que

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b |f(t)|dt \text{ et } -\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Or pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leq |f(t)|$ et $-f(t) \leq |f(t)|$. Puisque $a < b$, on a par intégration :

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b |f(t)|dt \text{ et } \int_a^b (-f(t))dt \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

donc $-\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b |f(t)|dt$ par linéarité.

On en déduit le résultat. □

Remarque : Ce résultat n'est rien d'autre qu'une généralisation de l'inégalité triangulaire aux intégrales (intégrale qui peut être vue comme la limite des intégrales d'une suite de fonctions en escalier, donc comme la limite d'une somme, résultat qui est d'ailleurs utilisé dans le chapitre suivant.)

Troisième partie

Somme de Riemann

Définition — Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle somme de Riemann (à gauche) d'ordre n associée à f sur $[a, b]$ le nombre réel

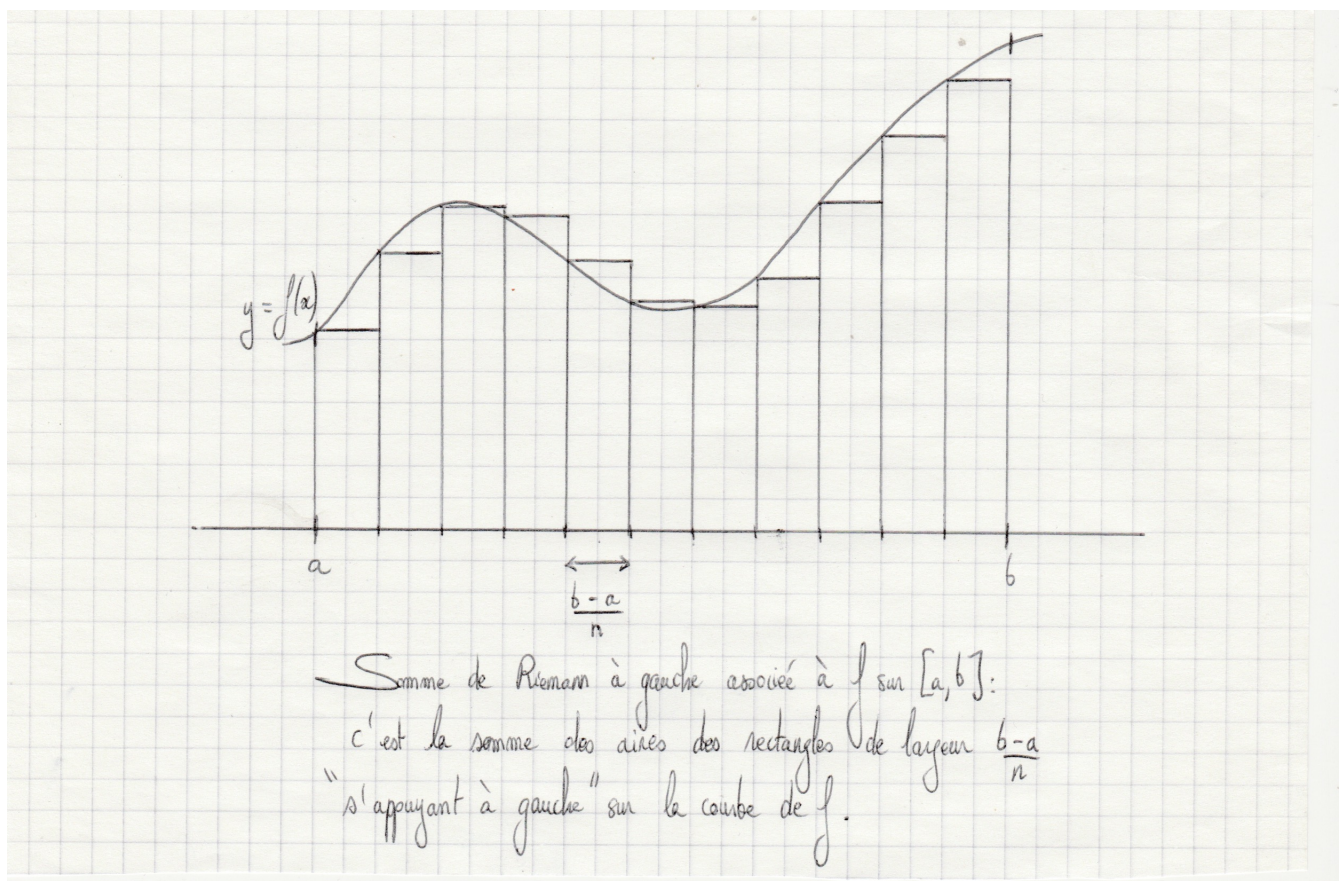
$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

Remarque : Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on pose

$$a_k = a + k \frac{b-a}{n}.$$

Alors $(a_0, \dots, a_n)$ est la subdivision régulière de $[a, b]$ de pas $\frac{b-a}{n}$.

$R_n(f)$ est l'intégrale sur $[a, b]$ de la fonction ϕ en escalier définie sur $[a, b]$ par : $\phi(x) = f(a_k)$ si $a_k \leq x < a_{k+1}$



Théorème — Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$$

Preuve. On traite ici uniquement le cas où $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$.

Alors f' est continue sur le segment $[a, b]$ donc f' est bornée sur $[a, b]$. Notons $L = \sup_{[a, b]} |f'|$.

La fonction f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $|f'(x)| \leq L$ pour tout $x \in]a, b[$. D'après l'inégalité des accroissements finis, f est L -lipschitzienne sur $[a, b]$:

$$\forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, posons $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$.

Alors pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}$ donc

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(a_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k) dt.$$

D'autre part, d'après la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k) dt \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k) dt \right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t) - f(a_k)) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t) - f(a_k)) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)| dt \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la linéarité de l'intégrale, l'inégalité triangulaire puis l'inégalité de la moyenne.

Soit $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Pour tout $t \in [a_k, a_{k+1}]$,

$$|f(t) - f(a_k)| \leq L|t - a_k| \leq L(a_{k+1} - a_k) \leq L \times \frac{b-a}{n}.$$

Par croissance de l'intégration sur un segment ($a_k \leq a_{k+1}$), on en déduit

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)| dt \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} L \frac{b-a}{n} dt = L \frac{b-a}{n} (a_{k+1} - a_k) = L \times \left(\frac{b-a}{n} \right)^2$$

Par somme d'inégalités,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)| dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} L \frac{(b-a)^2}{n^2} = L \frac{(b-a)^2}{n}$$

Ainsi :

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right| \leq \frac{L(b-a)^2}{n}$$

Et d'après le théorème des gendarmes, on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right| = 0,$$

d'où le résultat. □

Remarque : Dans la preuve, on a montré que

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt + o(1/n)$$

Remarque : Un résultat analogue pour les sommes de Riemann à droite peut être énoncé : si $f \in C^0([a, b])$,

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)dt$$

Remarque : Ce résultat permet d'obtenir la limite de certaines suites dont le terme général s'écrit comme une somme de n termes, à condition de réussir à identifier une somme de Riemann. On peut toujours s'arranger pour travailler sur le segment $[0, 1]$ et dans ce cas, le théorème affirme que si $f \in C^0([0, 1])$, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t)dt$$

Exemple : Déterminer, si elle existe, la limite de la suite u de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$.

Peut-on reconnaître une somme de Riemann ? on cherche à faire apparaître dans la somme une fonction de k/n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$,

$$\frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+k/n}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+k/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+k/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

Or $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln |1+t|]_0^1 = \ln(2).$$

Par conséquent, la suite u converge vers $\ln(2)$.

Exemple : Déterminer, si elle existe, la limite de la suite u de terme général $u_n = n \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n+k)^2}$.

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_n &= n \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n+k)^2} \\ &= n \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n(1+k/n))^2} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(1+k/n)^2} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

où $f : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$.

De plus, on peut isoler le dernier terme de la somme : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} f(1).$$

La fonction f est continue sur $[0, 1]$ donc le théorème des sommes de Riemann assure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2} dt = \left[-\frac{1}{1+t} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f(1) = 0$ donc par limite d'une somme, la suite u converge vers $\frac{1}{2}$.

Exemple : Déterminer un équivalent de la suite u de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + (k/n)^2} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

où $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx = [\text{Arctan}(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi, $\lim nu_n = \frac{\pi}{4}$ et par conséquent, $u_n \sim \frac{\pi}{4n}$.

Quatrième partie

Calcul intégral (cf début d'année)

1 Primitives et intégrale

Théorème fondamental du calcul différentiel — Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Soit $a \in I$. Alors la fonction

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t) \, dt \end{aligned}$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

Preuve : • Montrons que F est une primitive de f sur I . Soit $x_0 \in I$. Montrons que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$. Pour cela, il suffit de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Soit $x \in I \setminus \{x_0\}$. D'après la relation de Chasles,

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t) \, dt - \int_a^{x_0} f(t) \, dt = \int_{x_0}^x f(t) \, dt.$$

Ainsi

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) \, dt - f(x_0).$$

Or $f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0) \, dt$.

Donc, avec l'inégalité de la moyenne, en posant $x_1 = \min(x, x_0)$ et $x_2 = \max(x_0, x)$, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) \, dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{[x_1, x_2]} (f(t) - f(x_0)) \, dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \int_{[x_1, x_2]} |f(t) - f(x_0)| \, dt \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. f est continue en x_0 donc $\lim_{x \rightarrow x_0} f = f(x_0)$. Par conséquent, il existe $h > 0$ tel que pour tout $y \in I \cap [x_0 - h, x_0 + h]$, $|f(y) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

Soit $x \in I \cap [x_0 - h, x_0 + h] \setminus \{x_0\}$. Posons $x_1 = \min(x, x_0)$ et $x_2 = \max(x_0, x)$. Alors pour tout $t \in [x_1, x_2]$,

$$|t - x_0| \leq |x - x_0| \leq h, \quad \text{donc} \quad |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Par croissance de l'intégrale sur un segment, on en déduit

$$\int_{[x_1, x_2]} |f(t) - f(x_0)| \, dt \leq \int_{[x_1, x_2]} \varepsilon \, dt = (x_2 - x_1)\varepsilon \leq \varepsilon |x - x_0|$$

Donc

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon.$$

On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [x_0 - h, x_0 + h] \setminus \{x_0\}$,

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, la limite épointée en x_0 de l'expression $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ est $f(x_0)$.

Donc F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Finalement, on en déduit que F est dérivable sur I et que $F' = f$: la fonction F est donc une primitive de f sur I .

De plus, $F(a) = \int_a^a f = 0$, donc F est une primitive de f qui s'annule en a . Montrons à présent que c'est la seule.

- **Unicité** : Soit G une primitive de f sur I telle que $G(a) = 0$. Alors la fonction $G - F$ est dérivable sur I et $(G - F)' = f - f = 0$. Par conséquent, la fonction $G - F$ est constante sur I . Or $G(a) - F(a) = 0$ donc $G - F = 0$, ce qui prouve que $G = F$.

Donc f admet une unique primitive sur I qui s'annule en a .

□

Corollaire. *Toute fonction continue sur un intervalle ou sur une réunion d'intervalles admet des primitives.*

2 Techniques de calcul

Théorème — Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Soit F une primitive de f . Alors pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Preuve : Soient $a, b \in I$. Posons

$$G : x \mapsto \int_a^x f(t) dt.$$

Alors G est la primitive de f qui s'annule en a et de plus,

$$G(b) = \int_a^b f(t) dt.$$

D'après l'énoncé, F est également une primitive de f . Or deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$G(x) = F(x) + k$$

pour tout $x \in I$. De plus, $G(a) = 0$ donc $F(a) = -k$.

Finalement,

$$F(b) - F(a) = F(b) + k = G(b) = \int_a^b f(t) dt.$$

□

Exemple : Déterminer le domaine de définition D de la fonction

$$f : x \mapsto \int_x^{e^x} \ln(t) e^{2t} dt,$$

puis montrer que f est dérivable sur D et calculer f' .

Posons $h : t \mapsto \ln(t)e^{2t}$. La fonction f est définie sur

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid h \in C^0([\min(x; e^x), \max(x; e^x)])\}.$$

Or h est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Donc si $x \in D$, $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Par conséquent, $D \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors $e^x \in \mathbb{R}^{+*}$ également, donc $[\min(x; e^x), \max(x; e^x)] \subset \mathbb{R}^{+*}$. Ainsi, $h \in C^0([\min(x; e^x), \max(x; e^x)])$ donc $x \in D$. Par conséquent, $\mathbb{R}^{+*} \subset D$.

Finalement, de la double inclusion on déduit l'égalité des ensembles : $D = \mathbb{R}^{+*}$.

La fonction h est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$. Notons H l'une d'entre elles. Alors pour tout $x \in D$,

$$f(x) = H(e^x) - H(x).$$

Par conséquent, f s'exprime à l'aide de somme et composée de fonctions dérivables sur leur domaine de définition, donc f est dérivable sur son domaine de définition D et pour tout $x \in D$:

$$f'(x) = e^x H'(e^x) - H'(x) = e^x h(e^x) - h(x) = e^x x \exp(2e^x) - \ln(x) e^{2x}.$$

Théorème : Intégration par parties — Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $a, b \in I$ et $u, v \in C^1(I, \mathbb{R})$ alors

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

Théorème : Changement de variable — Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit $f \in C^0(I, \mathbb{R})$. Soit $\phi \in C^1(J, \mathbb{R})$. On suppose que $\phi(J) \subset I$.

Alors pour tous $\alpha, \beta \in J$

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x))\phi'(x) dx$$

3 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème ♥♥♥ — Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, soit $a \in I$. Alors, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, introduisons l'assertion H_n :

$$"\forall f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R}), \forall a, x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt"$$

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Soient $a, x \in I$.

$$\int_a^x f'(t) dt = [f(t)]_a^x = f(x) - f(a)$$

donc

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t) dt.$$

Par conséquent, l'assertion H_0 est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I, \mathbb{R})$. Soient $a, x \in I$.

En particulier, $f \in \mathcal{C}^{n+1}$, donc d'après H_n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Or la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ donc la fonction $f^{(n+1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités a et x . De plus, La fonction $t \mapsto -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{(x-t)^n}{n!}$ et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités a et x .

Par intégration par parties, on en déduit

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt &= \left[-f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_a^x - \int_a^x f^{(n+2)}(t) \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} + \int_a^x f^{(n+2)}(t) \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt \end{aligned}$$

Ainsi :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt.$$

Par conséquent, l'assertion H_{n+1} est vraie.

Finalement, le principe de récurrence assure que l'assertion H_n est vraie pour tout entier naturel n . $\square$

Exemple : Montrer que pour tout nombre réel x ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Posons $f : x \mapsto e^x$. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = f$ donc

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Alors, avec l'inégalité de la moyenne,

$$\begin{aligned} \left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \right| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \\ &= \left| \int_{[\min(0,x), \max(0,x)]} \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \\ &\leq \int_{[\min(0,x), \max(0,x)]} \left| \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \right| dt \end{aligned}$$

Posons $x_1 = \min(0, x)$ et $x_2 = \max(0, x)$.

Pour tout $t \in [x_1, x_2]$, $0 \leq |x-t| \leq |x|$ et $0 \leq |e^t| = e^t \leq e^{x_2}$ donc

$$0 \leq \frac{|x-t|^n}{n!} e^t \leq \frac{|x|^n}{n!} e^{x_2}$$

et par croissance de l'intégrale sur un segment, on en déduit

$$0 \leq \int_{x_1, x_2} \left| \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \right| dt \leq \int_{[x_1, x_2]} \left| \frac{x^n}{n!} e^{x_2} \right| dt = |x| \left| \frac{x^n}{n!} e^{x_2} \right|.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \right| \leq |x| e^{x_2} \frac{|x|^n}{n!}.$$

Or $a^n = o(n!)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x| e^{x_2} \frac{|x|^n}{n!} = 0.$$

Le théorème des gendarmes assure alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \right| = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Corollaire (Formule de Taylor Young :). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in C^n(I, \mathbb{R})$. Soit $a \in I$. Alors*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Preuve : Soit $x \in I$. La fonction f est de classe C^n sur I donc d'après la formule de Taylor,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(f)$$

où

$$R_n(f) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt.$$

Or

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} \right]_a^x = \frac{(x-a)^n}{n!}$$

donc

$$R_n(f) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = R_n(f) - \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a) dt = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)) dt.$$

La fonction $g : t \mapsto \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a))$ est continue sur I (car f est de classe C^n), donc g admet des primitives sur I . Notons G l'une d'entre elles.

Alors

$$R_n(f) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)) dt = G(x) - G(a).$$

De plus, la fonction G est continue sur le segment d'extrémités a et x , dérivable à l'intérieur de ce segment, donc l'égalité des accroissements finis assure qu'il existe $c_x \in]\min(a, x), \max(a, x)[$ tel que $G(x) - G(a) = G'(c_x)(x-a)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(f) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(f) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + G'(c_x)(x-a). \end{aligned}$$

Or

$$\frac{G'(c_x)(x-a)}{(x-a)^n} = \frac{g(c_x)}{(x-a)^{n-1}} = \left(\frac{x-c_x}{x-a} \right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} (f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)).$$

De plus, c_x est compris entre a et x donc le théorème des gendarmes assure que

$$\lim_{x \rightarrow a} c_x = a,$$

et puisque la fonction $f^{(n)}$ est continue,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)) = 0.$$

Enfin, $|x - c_x|$ est compris entre 0 et $|x - a|$ donc $\left| \frac{x-c_x}{x-a} \right|$ est compris entre 0 et 1. Ainsi,

$$0 \leq \left| \frac{x-c_x}{x-a} \right|^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} |f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)| \leq \frac{1}{(n-1)!} |f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)|$$

donc d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \left(\frac{x-c_x}{x-a} \right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} (f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)) \right| = 0$$

donc

$$G'(c_x)(x-a) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^n) \quad \text{et par conséquent} \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

□

Cinquième partie

Intégration des fonctions à valeurs complexes

Définition — Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On appelle intégrale de f entre a et b et on note $\int_a^b f(t)dt$ le nombre complexe : $\int_a^b \operatorname{Re}(f(t))dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t))dt$

Les propriétés suivantes restent vraies pour cette notion :

- Linéarité
- Chasles
- Lien entre intégrale et primitives
- Techniques de calcul
- Formule de Taylor avec reste intégral et formule de Taylor-Young

Théorème — Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{C})$. Alors

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Preuve. Posons $z = \int_a^b f(t)dt$.

- Si $z = 0$, le résultat est vrai.
- Supposons $z \neq 0$. Posons $R = |z|$ et $\phi = \operatorname{Arg}(z)$. Alors $z = R e^{i\phi}$.
Donc $z e^{-i\phi} = R$ et R est un réel positif. Ainsi

$$|z| = |z| |e^{-i\phi}| = |z e^{-i\phi}| = |R| = R = z e^{-i\phi} = e^{-i\phi} \int_a^b f(t)dt = \int_a^b e^{-i\phi} f(t)dt.$$

Donc

$$|z| = R = \operatorname{Re}(R) = \operatorname{Re} \left(\int_a^b e^{-i\phi} f(t)dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\phi} f(t)) dt$$

par définition d'une intégrale complexe.

Or on sait que pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\omega) \leq |\omega|$, donc pour tout $t \in [a, b]$,

$$\operatorname{Re}(e^{-i\phi} f(t)) \leq |e^{-i\phi} f(t)| \leq |f(t)|$$

Par croissance de l'intégrale d'une fonction à valeurs réelles sur un segment, on en déduit

$$\int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\phi} f(t))dt \leq \int_a^b |f(t)|dt, \quad \text{donc} \quad \left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

□