

Développements limités

Dans ce chapitre D désigne une partie de $\mathbf{R}$ de la forme $D = I$ ou bien $D = I \setminus \{\alpha\}$ où I est un intervalle non vide et non réduit à un point et α est un point de I ou une de ses extrémités. De plus, n désignera un entier naturel. Enfin, $\mathbf{K}$ désignera le corps des réels $\mathbf{R}$ ou celui des complexes $\mathbf{C}$.

1. Définition et premières propriétés

Définition 1.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbf{K})$. On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre n en a s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que l'on ait

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} P_n(x - a) + o((x - a)^n)$$

ou de manière équivalente

$$f(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} P_n(h) + o(h^n)$$

ou encore, en notant $P_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$,

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \alpha_k (x - a)^k + o((x - a)^k).$$

Le polynôme P_n est appelé **partie principale** ou **régulière** du développement limité.

On notera de manière abrégée f a un $DL_n(a)$.

Remarque 2. 1. Dans ces formules, il ne faut surtout pas développer les puissances de $x - a$, car elles sont intéressantes à considérer lorsque l'on se situe au voisinage de a .

2. En posant $g(h) = f(a + h)$, on peut toujours se ramener à un développement limité en 0, et dans la suite du cours, on ne considérera que des développements limités au voisinage de 0.

3. Désormais, lorsqu'on parlera du développement limité en 0 (respectivement en a) d'une fonction f définie sur D , cela signifiera implicitement que 0 (respectivement a) est un point ou une extrémité de D .

4. Quand on écrit un développement limité, le degré maximal des monômes qui apparaît avant

$\text{ord}_a((x-a)^n)$ est inférieur ou égal n . Une écriture comme

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 3x^2 + x^3 + x^4 + o(x^3)$$

n'est pas un développement limité. Puisque $x^4 = o(x^3)$, on peut écrire

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 3x^2 + x^3 + o(x^3)$$

et l'on a maintenant un développement limité à l'ordre 3.

5. L'ordre d'un développement limité est l'exposant qui apparaît dans $o((x - a)^n)$. Par exemple, le développement limité

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 3x^2 + x^4 + o(x^6)$$

est un développement limité à l'ordre 6 et pas à l'ordre 4. Nous verrons que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 3x^2 + x^4 + o(x^4)$ est vrai aussi, mais moins précis.

Exemple 3. La fonction $f :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ a un $\text{DL}_4(0)$. En effet,

$$x \longmapsto x - x^2 + x^3 \ln(1+x) + 2x^4$$

si $x > -1$,

$$f(x) - (x - x^2) = x^3 \ln(1 + x) + 2x^4 = o(x^2) \text{ as } x \rightarrow 0.$$

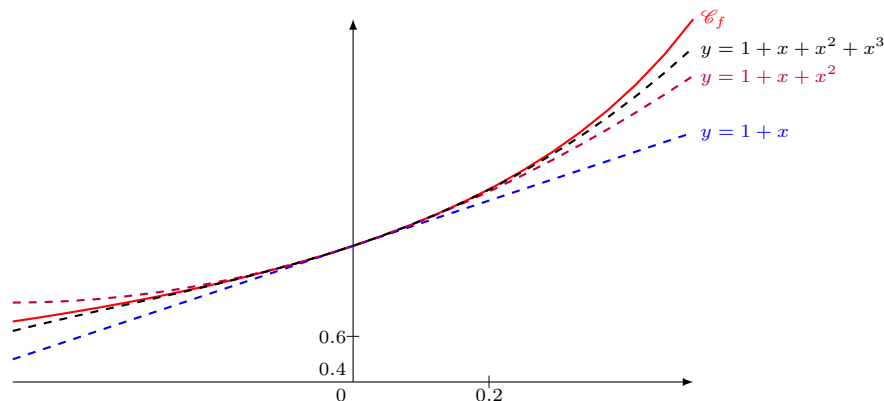
En effet, il est clair que $2x^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$ et $x^3 \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^4$, d'où $x^3 \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$. Ainsi,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + o(x^2).$$

Remarque technique 4. Les fonctions polynomiales admettent des développements limites à tous les ordres.

Exercice d'application 5. Déterminer le $\text{DL}_2(0)$ et le $\text{DL}_7(0)$ de $x \mapsto (1+x)^4$.

Exercice d'application 6. Soit $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbf{R}$. Montrer que f a un $\text{DL}_n(0)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.



Complément : notons qu'en remplaçant x par $-x$ dans la formule précédente, on obtient

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$$

⚠ Attention ⚠. Deux fonctions admettant les mêmes développements limités à tous les ordres en un point peuvent être différentes au voisinage de ce point.

Par exemple, considérons la fonction

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $x \in \mathbf{R}^*$.

$$\frac{f(x)}{x^n} = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{n}{2}} \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées. Ainsi,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n).$$

La fonction f admet les mêmes développements limités que la fonction nulle (en effet pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 = o(x^n)$) et bien sûr f n'est pas la fonction nulle.

Un développement limité n'est donc qu'une propriété *locale* : une fonction possède un unique développement limité à l'ordre n en un point mais les développements limités à tous les ordres en un point d'une fonction ne suffisent pas pour la caractériser entièrement.

Proposition 7.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbf{K})$. On suppose que f admet un $\text{DL}_n(a)$.

1. La partie régulière de ce développement limité est unique.
2. f admet aussi un $\text{DL}_p(a)$ pour tout entier naturel $p \leq n$. De plus, la partie principale est obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à p de la partie régulière du $\text{DL}_n(a)$ (on parle de **troncature** à l'ordre p).

Démonstration. 1. Suppose par l'absurde qu'il existe deux $(n+1)$ -uplets $(a_0, \dots, a_n)$ et $(b_0, \dots, b_n)$ différents tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Notons p le plus petit indice de $\llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $a_p \neq b_p$. En faisant la différence de ces deux développements limités, on obtient, puisque les p premiers coefficients sont égaux,

$$(a_p - b_p)(x - a)^p + \sum_{k=p+1}^n (a_k - b_k)(x - a)^k \underset{x \rightarrow a}{=} o((x - a)^n)$$

et, en divisant le tout par $(x - a)^p$, on obtient qu'il existe $\varepsilon \in \mathcal{F}(D, \mathbf{K})$ qui tend vers 0 en a telle que

$$\forall x \in \mathbf{D} \setminus \{a\}, \quad b_p = a_p + \sum_{k=p+1}^n (a_k - b_k)x^{k-p} + (x - a)^{n-p}\varepsilon(x).$$

Lorsqu'on prend la limite en a , on obtient $a_p = b_p$ ce qui contredit la minimalité de p .

2. Immédiat en observant que pour tout $j \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, $(x - a)^j = o((x - a)^p)$. □

Exercice d'application 8. Déterminer la troncature à l'ordre 4 du développement limité

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + 2x^4 + x^5 + o(x^6).$$

↪

Définition 9.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbf{K})$. On suppose que f admet un $DL_n(a)$ de partie régulière non nulle :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x - a) + \cdots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n).$$

Notons p le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$. On appelle **forme normalisée** de ce développement limité le développement

$$f(x) = (x - a)^p (a_p + a_{p+1}(x - a) + \cdots + a_n(x - a)^{n-p} + o((x - a)^{n-p})),$$

i.e.

$$f(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^p (a_p + a_{p+1}h + \cdots + a_n h^{n-p} + o(h^{n-p})).$$

Proposition 10.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbf{K})$ dont la forme normale du développement limité à l'ordre n en a est :

$$f(x) = (x - a)^p (a_p + a_{p+1}(x - a) + \cdots + a_n(x - a)^{n-p} + o((x - a)^{n-p}))$$

(donc $a_p \neq 0$). Alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_p(x - a)^p$.

Démonstration.

En tronquant à l'ordre p , on a $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_p(x - a)^p + o((x - a)^p)$, d'où $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_p(x - a)^p + o(a_p(x - a)^p)$ puis $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_p(x - a)^p$. □

Corollaire 11.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbf{K})$ dont la forme normale du développement limité à l'ordre n en a est :

$$f(x) = (x - a)^p (a_p + a_{p+1}(x - a) + \cdots + a_n(x - a)^{n-p} + o((x - a)^{n-p}))$$

(donc $a_p \neq 0$). Alors $f(x)$ est du même signe que $a_p(x - a)^p$ si x est au voisinage de a .

Démonstration.

Immédiat en utilisant le signe local d'un équivalent. □

Sous les mêmes hypothèses que la proposition, la fonction $x \mapsto f(x) - a_p(x-a)^p$ possède un DL à l'ordre n au voisinage de a :

$$f(x) - a_p(x-a)^p \underset{x \rightarrow a}{=} a_{p+1}(x-a)^{p+1} + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Si la partie régulière de celui-ci n'est pas nulle et possède pour forme normalisée

$$f(x) - a_p(x-a)^p \underset{x \rightarrow a}{=} (x-a)^q (a_q + a_{q+1}(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^{n-q} + o(x^{n-q})),$$

où $a_q \neq 0$, on obtient l'équivalent $f(x) - a_p(x-a)^p \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_q(x-a)^q$.

Proposition 12.

Supposons que f a un $DL_n(0)$. Si f est paire (resp. impaire), son développement limité ne comporte que des puissances paires (resp. impaires).

Démonstration.

Voir TD. □

Remarque 13. Cette proposition n'admet pas de réciproque : une fonction qui admet des développements limités paires en 0 à tout ordre n'est pas nécessairement paire. Un développement limité est une propriété locale et on ne peut pas déduire des développements limités des propriétés globales sur les fonctions.

2. Existence d'un développement limité

2.1. Régularité et développement limité

Proposition 14.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbf{K})$.

1. f a un $DL_0(a)$ si et seulement si f est continue en a . Le cas échéant,

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1).$$

2. f a un $DL_1(a)$ si et seulement si f est dérivable en a . Le cas échéant,

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a).$$

Démonstration. 1. Supposons que f a un $DL_0(a)$, qu'on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + o(1)$. Par définition du petit o, $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} a_0$, donc f est continue en a et $a_0 = f(a)$.

Réciproquement, supposons que f est continue en a . Alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} f(a)$, puis $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1)$.

2. Voir cours de dérivation. □

Exemple 15. • $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=}$

- $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 0$
- $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1$

Remarque 16. Si f est une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$ admettant un $DL_1(a)$ de la forme

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o(x-a),$$

alors :

- f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$;
- le prolongement par continuité de f en a est dérivable en a avec $f'(a) = a_1$.

Exercice d'application 17. Étudier $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ au voisinage de 0.

On admettra que $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

↪

⚠ Attention ⚠. Ce résultat ne se généralise pas pour des développements limités d'ordre supérieur :

Exercice d'application 18. Considérons $f : x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbf{R}^*$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer ce prolongement par continuité est dérivable sur $\mathbf{R}$ mais pas deux fois dérivable.
3. Montrer que f admet tout de même un développement limité à l'ordre 2 en 0.

↪

2.2. Formule de Taylor-Young

Théorème 19 - Formule de Taylor-Young.

Soit $f \in \mathcal{C}^n(D, \mathbf{K})$. Alors f possède un $\text{DL}_n(a)$ donné par :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

ou encore

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

Le polynôme $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$ est appelé **polynôme de Taylor** de f en a à l'ordre n .

Ainsi une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ admet donc un DL_p ($p \leq n$) en tout point de son domaine de définition, de partie principale son polynôme de Taylor.

⚠ Attention ⚠. f peut posséder un $\text{DL}_n(a)$ sans que le k -ième coefficient de sa partie principale soit $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ (pour $k \geq 2$) : cf. Exercice d'application 18.

Exercice d'application 20. Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer le $\text{DL}_n(0)$ de la fonction exponentielle.

↪

Exercice d'application 21. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Déterminer le $\text{DL}_n(0)$ de $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$.

↪

3. Développements limites usuels

On donne ici les développements limités usuels en 0. Certains sont déjà démontrés, les autres le seront dans la suite de ce chapitre. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et $n, p \in \mathbf{N}$.

1. $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
2. $\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
3. $\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
4. $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
5. $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
6. $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$
7. $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n)$
 $\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$

Exercice d'application 22. Donner les $\text{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

$\hookrightarrow$

4. Opérations sur les développements limités

4.1. Développement limité d'une combinaison linéaire

Proposition 23.

Si f et g sont deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en 0, alors la fonction $f+g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0. La partie régulière du DL à l'ordre n en 0 de $f+g$ est la somme des parties régulières des DL l'ordre n en 0 de f et g .

Démonstration.

Sous les hypothèses de la proposition, on écrit les DL à l'ordre n en 0 de f et g en introduisant ε_1 et ε_2 deux fonctions qui tendent vers 0 en 0 :

$$\forall x \in D \setminus \{0\}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + x^n \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + x^n \varepsilon_2(x).$$

En ajoutant ces deux égalités, on obtient

$$\forall x \in D \setminus \{0\}, \quad (f+g)(x) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k + x^n (\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)),$$

puis, comme $\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$,

$$(f + g)(x) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k)x^k + o(x^n).$$

□

Proposition 24.

Soit $\lambda \in \mathbf{K}^*$. Si f admet un $\text{DL}_n(0)$, alors λf admet un $\text{DL}_n(0)$ dont la partie régulière est le produit de la partie régulière du $\text{DL}_n(0)$ de f multipliée par λ .

Démonstration.

Sous les hypothèses de la proposition, on écrit le $\text{DL}_n(0)$ de f en introduisant ε une fonction qui tend vers 0 en 0 :

$$\forall x \in \mathbf{D} \setminus \{0\}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + x^n \varepsilon(x).$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbf{D} \setminus \{0\}, \quad \lambda f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + \lambda x^n \varepsilon(x).$$

On conclut en remarquant que $\lambda \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

□

Exemple 25. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\text{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. On a

$$e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} + o((-x)^{2n}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} + o(x^{2n})$$

d'où

$$e^x + e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

Or ch est une fonction paire. On en déduit que les coefficients de sa partie régulière sont tous pairs, puis

$$\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

De même, on montre que

$$\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

Exercice d'application 26. Donner un développement limité à l'ordre 6 en 0 de $\text{sh} - \sin$.

↪

Remarque 27. Si f admet un DL à l'ordre n et si g admet un DL à l'ordre p , alors en faisant la somme des développements limités de f et g , on ne peut obtenir qu'un DL à l'ordre $\min(n, p)$ de $f + g$.

4.2. Développement limité d'un produit

Proposition 28.

Si f et g sont deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en 0, alors la fonction $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.

La partie régulière du DL à l'ordre n en 0 de $f \times g$ est obtenue en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit des parties régulières des DL à l'ordre n en 0 de f et g .

Démonstration.

Sous les hypothèses de la proposition, on écrit les DL à l'ordre n en 0 de f et g en introduisant $P_n, Q_n \in \mathbf{K}_n[X]$, ε_1 et ε_2 deux fonctions qui tendent vers 0 en 0 :

$$\forall x \in D \setminus \{0\}, \quad f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = Q_n(x) + x^n \varepsilon_2(x).$$

Dans le produit $P_n Q_n$, isolons les termes de degré inférieur ou égal à n : $P_n Q_n = R_n + X^{n+1} S_n$ avec $(R_n, S_n) \in \mathbf{K}_n[X] \times \mathbf{K}[X]$. Alors, en multipliant les deux égalités précédentes traduisant les DL, on obtient

$$\begin{aligned} \forall x \in D \setminus \{0\}, \quad (fg)(x) &= P_n(x)Q_n(x) + x^n(P_n(x)\varepsilon_2(x) + Q_n(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)) \\ &= R_n(x) + x^n(xS_n(x) + P_n(x)\varepsilon_2(x) + Q_n(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)) \end{aligned}$$

Puisque $xS_n(x) + P_n(x)\varepsilon_2(x) + Q_n(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, ceci montre que fg a un $DL_n(0)$. $\square$

Exercice d'application 29. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto e^x(1 + \sin(x))$:

$\hookrightarrow$

Exercice d'application 30. Déterminer le

- | | |
|--|---|
| (a) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \cos(x) \sin(x)$ | (b) $DL_6(0)$ de $\cos^2$ |
| (c) $DL_2(0)$ de $x \mapsto \cos(x)\sqrt{1+x}$ | (d) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{1-x}$ |
| (e) $DL_5(0)$ de $x \mapsto \frac{\sin(x) \operatorname{sh}(x)}{\sqrt{1-x}}$ | |

$\hookrightarrow$

Remarque technique 32. D'après la proposition précédente, il suffit de connaître un DL à l'ordre n en 0 de f et de g pour obtenir un DL à l'ordre n en 0 du produit $f \times g$. Mais ce n'est pas une condition nécessaire : il est parfois inutile de «pousser» les DL de f et g jusqu'à l'ordre n pour obtenir un DL à l'ordre n de $f \times g$, on peut parfois développer f et/ou g à un ordre plus petit (cf exemple suivant).

- $$\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4).$$

$$(\cos(x) - 1) \ln(1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4).$$

- En optimisant : On se contente d'écrire un DL à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \cos(x) - 1$ et un DL à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$. Le produit

$$(\cos(x) - 1) \ln(1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \right) \left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right)$$

- le $o(x^3)$ du premier facteur est multiplié « au minimum » par x et donne un $o(x^4)$;
- le $o(x^2)$ du deuxième facteur est multiplié « au minimum » par x^2 et donne un $o(x^4)$.

Proposition 34.

Exemple 35. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos(x) = \operatorname{ch}(ix)$ et on a montré que

$$\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

De même, en utilisant $\sin(x) = \frac{\text{sh}(ix)}{i}$, on obtient

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

Exercice d'application 36. Calculer le

- | | |
|--|--|
| (a) $\text{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+2x}$ | (b) $\text{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \ln(1+2x-x^2)$ |
| (c) $\text{DL}_3(0)$ de $x \mapsto e^{\sin(x)}$ | (d) $\text{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \sin(\text{sh}(x))$ |
| (e) $\text{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{3+\sqrt{1+2x}}$. | |

$\hookrightarrow$

Remarque technique 37. Avec les notations de la proposition, si on veut un $DL_n(0)$ de $g \circ f$, on n'est pas toujours obligé d'utiliser un $DL_n(0)$ de g ou de f .

Exercice d'application 38. Calculer le

- (a) $DL_5(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$. (b) $DL_6(0)$ de $x \mapsto \sin(x^2)$. (c) $DL_4(0)$ de $x \mapsto (1+x)^x$.

↪

Remarque technique 39. Pour obtenir un $DL_n(0)$ d'une fonction de la forme

$$f : x \mapsto \exp(C + a_1x + a_2x^2 + \dots),$$

on utilise la propriété algébrique de l'exponentielle suivante : $f(x) = \exp(C) \exp(a_1x + a_2x^2 + \dots)$.

Exercice d'application 40. Déterminer le $DL_4(0)$ de $x \mapsto e^{\cos(x)}$.

↪

Remarque technique 41. Pour obtenir un $DL_n(0)$ d'une fonction de la forme

$$f : x \mapsto \ln(C + a_1x + a_2x^2 + \dots),$$

où $C \neq 0$, on utilise la propriété algébrique suivante : $f(x) = \ln(C) + \ln(1 + \frac{a_1}{C}x + \frac{a_2}{C}x^2 + \dots)$.

Exercice d'application 42. Déterminer le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \ln(\cos(x))$.

↪

4.4. Développement limité d'un quotient

Proposition 43.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si u est une fonction définie sur D , possédant un développement limité à l'ordre n en 0, telle que $\lim_{x \rightarrow 0} u = 0$, alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-u(x)}$ possède un développement limité à l'ordre n en 0. Plus précisément, si le DL de u à l'ordre n en 0 est

$$u(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n),$$

alors le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{1-u(x)}$ est obtenu en ne gardant que les monômes de degré inférieur ou égal à n dans les développements des $(u(x))^k$ (où $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$) dans l'égalité

$$\frac{1}{1-u(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + u(x) + (u(x))^2 + \cdots + (u(x))^n + o(x^n).$$

Démonstration.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-u(x)}$ est la composée des fonctions $h \mapsto \frac{1}{1-h}$ et u , et le DL à l'ordre n de $h \mapsto \frac{1}{1-h}$ est

$$\frac{1}{1-h} \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 + h + h^2 + \cdots + h^n + o(h^n).$$

Il suffit alors d'appliquer le résultat du paragraphe précédent sur les DL des composées de fonctions. $\square$

Exemple 44. $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} \right) + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3).$

Exercice d'application 45. Calculer le $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto \frac{1}{1-\sin(x)}$.

$\hookrightarrow$

Proposition 46.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant 0 et ayant une limite finie ℓ non nulle en 0.

Si f a un développement limité à l'ordre n en 0, alors il en va de même pour $\frac{1}{f}$.

Démonstration.

Il suffit d'écrire que pour tout $x \in I$,

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell} \times \frac{1}{1 - \frac{\ell - f(x)}{\ell}}$$

et la fonction $g : x \mapsto \frac{\ell - f(x)}{\ell}$ tend vers 0 en 0 et possède un DL à l'ordre n en 0. Il ne reste plus qu'à développer $x \mapsto \frac{1}{1-g(x)}$. $\square$

Si l'on a le choix des valeurs de n_1 et n_2 (par exemple si f et g possèdent un DL à tout ordre en 0), il faut prévoir ces valeurs en fonction de l'ordre n auquel on désire développer la fonction $\frac{f}{g}$.

Exercice d'application 51.

4.5. Intégration d'un développement limité

Théorème 52.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant 0. Si f possède un développement limité en 0 à l'ordre n ,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

alors toute primitive F de f possède un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 :

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}).$$

Démonstration.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant 0 et F une primitive de f . On suppose que f possède un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n).$$

Considérons la fonction définie sur I par

$$\varphi : x \longmapsto F(x) - F(0) - \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Montrons que $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{n+1})$. La fonction φ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad \varphi'(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$$

ce qui montre que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x)}{x^n} = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. La limite précédente assure qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \quad |x| \leq \alpha \implies |\varphi'(x)| \leq \varepsilon |x|^n.$$

Soit $x \in I$ tel que $|x| \leq \alpha$. Pour tout réel t compris entre 0 et x , on a $|\varphi'(t)| \leq \varepsilon |t|^n \leq \varepsilon |x|^n$.

On peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à φ ce qui nous donne

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \varepsilon |x|^n |x - 0| = \varepsilon |x|^{n+1}.$$

Comme $\varphi(0) = 0$, on a donc $|\varphi(x)| \leq \varepsilon |x|^{n+1}$. On a démontré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, \quad |x| \leq \alpha \implies |\varphi(x)| \leq \varepsilon |x|^{n+1},$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} = 0$ ce qui signifie exactement que $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{n+1})$. □

Remarque 53. Le résultat reste valable pour un développement limité en a avec

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k h^k + o(h^n), \quad F(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} F(a) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{h^{k+1}}{k+1} + o(h^{n+1}).$$

⚠ Attention ⚠. La réciproque de ce théorème est fautive : si une fonction dérivable f admet un développement limité à l'ordre n en a , sa dérivée n'admet pas nécessairement un développement limité d'ordre $n-1$ en a .

Exemple 54. La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Or pour tout $n \in \mathbf{N}$, on

a montré précédemment que $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$ donc, en intégrant,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(1+0) + \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{p=1}^{n+1} \frac{(-1)^{p-1}}{p} x^p + o(x^{n+1}) \end{aligned}$$

et donc, en tronquant le développement limité précédent à l'ordre n :

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)$$

Exercice d'application 55. Déterminer le $DL_6(0)$ de Arctan, Arcsin et Arccos.

↪

5. Applications des développements limités

5.1. Recherche d'équivalents et calcul de limites

On utilise la Proposition 10.

Exercice d'application 56. Chercher un équivalent en 0 de $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1$ et en déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1}{x^2}$

$\hookrightarrow$

Exercice d'application 57. Déterminer, si elle existe, la limite en 0 de $f : x \mapsto \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{\operatorname{sh}(x) - x \operatorname{ch}(x)}$.

$\hookrightarrow$

Exercice d'application 58. Donner un équivalent simple de $f : x \mapsto x(1 + \cos(x)) - 2 \tan(x)$ en 0.

$\hookrightarrow$

$$f : x \longmapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x(x+1)}{1+x^2}.$$

5.2. Recherche de tangente et position de la courbe par rapport à sa tangente

Remarque technique 60. Si une fonction f possède un DL à l'ordre 1 au voisinage de a , celui-ci détermine une équation de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point A de coordonnées $(a, f(a))$. Plus précisément, si

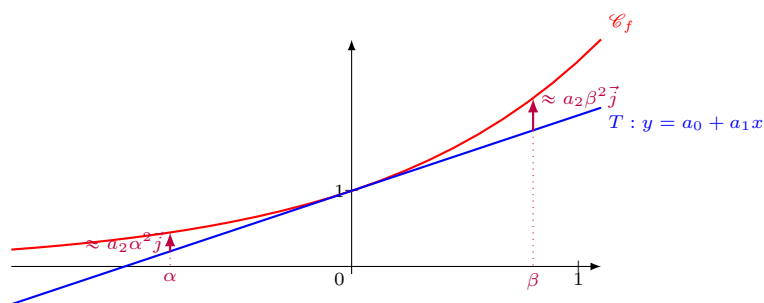
$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 h + o(h) \quad i.e. \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$$

alors une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en M_0 est $y = a_0 + a_1(x - x_0)$.

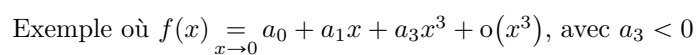
Si on a un DL de f en a à un ordre supérieur, le premier terme non nul de degré supérieur ou égal à 2 donne la position de la tangente par rapport à $\mathcal{C}_f$. Plus précisément, si

$$fa + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 h + a_n h^n + o(h^n) \quad \text{i.e.} \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x - a) + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

avec $n \geq 2$ et $a_n \neq 0$, alors $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} a_n(x - x_0)^n$ et donc $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0))$ est localement du signe de $a_n(x - x_0)^n$. Si n est pair, la courbe est au-dessus ou en-dessous de sa tangente suivant le signe de a_n . Si n est impair, la courbe traverse la tangente.



Exemple où $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)$, avec $a_2 > 0$



Remarque technique 64. La Proposition 14 permet de déterminer des prolongements à partir de DL.

Exercice d'application 65. Étudier le prolongement par continuité en 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}.$$

↪

5.3. Étude des branches infinies

Définition 66.

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. La droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est dite **asymptote** à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (\alpha x + \beta) = 0$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (\alpha x + \beta) = 0$).

Remarque technique 67. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ vérifiant

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Alors la courbe représentative de f admet une asymptote d'équation $y = \alpha x + \beta$ au voisinage de $+\infty$. De plus, si $\gamma \neq 0$, alors la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de γ .

Un résultat analogue existe en $-\infty$.

Exercice d'application 68. Trouver les asymptotes à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ et les placer par rapport à cette courbe.

↪

5.4. Recherche d'extrema

Remarque technique 69. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un élément de I qui n'en est pas une extrémité. On sait qu'une condition nécessaire pour que f ait un extremum local en a est que $f'(a) = 0$. En un tel point où $f'(a) = 0$, pour savoir si $f(a)$ est bien un extremum de f , on écrit un DL de f en a à un ordre suffisant pour pouvoir trouver un équivalent de $f(a+h) - f(a)$ lorsque h tend vers 0.

- Si $f(a+h) - f(a) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_p h^p$ où p est un nombre pair, alors $f(a)$ est un extremum local de f (maximum si $a_p < 0$ et minimum si $a_p > 0$).
- Si $f(a+h) - f(a) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_q h^p$ où q est un nombre impair, alors $f(a)$ n'est pas un extremum local de f .

Exercice d'application 70. La fonction $f : x \longmapsto 2 + (\sin(x) - \operatorname{sh}(x)) \operatorname{Arctan}(x)$ admet-elle un extremum en 0 ?

↪