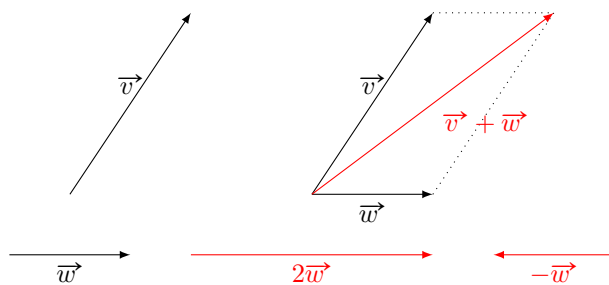


Espaces vectoriels - partie 1

Dans ce cours, $\mathbf{K}$ représente $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. L'exemple du plan

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan, on sait construire le vecteur somme $\vec{v} + \vec{w}$ et les vecteurs $\lambda \vec{v}$, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$.



La loi $+$ ainsi définie munit l'ensemble $\vec{\mathcal{P}}$ des vecteurs du plan d'une structure de **groupe commutatif**.

- $+$ est une loi associative : pour tout $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{P}}^3$, $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
- $+$ est une loi commutative : pour tout $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{P}}^2$, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- Le vecteur nul est neutre pour la loi $+$: pour tout $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$, $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.
- Tout vecteur admet un symétrique pour la loi $+$: pour tout $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$, $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

De plus, l'opération de multiplication par un nombre réel, notée $\cdot$, se comporte « bien » vis à vis de cette loi.

- Pour tout $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$, $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.
- Pour tout $(\lambda, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathbf{R} \times \vec{\mathcal{P}}^2$, $\lambda \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{w}$.
- Pour tout $(\lambda, \mu, \vec{v}) \in \mathbf{R}^2 \times \vec{\mathcal{P}}$, $(\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{v}$.
- Pour tout $(\lambda, \mu, \vec{v}) \in \mathbf{R}^2 \times \vec{\mathcal{P}}$, $(\lambda\mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v})$.

D'autres ensembles déjà rencontrés possèdent ces mêmes caractéristiques, par exemple l'ensemble des matrices de taille $n \times p$: on sait faire la somme de deux telles matrices et multiplier une matrice par un coefficient. Les règles de calculs sont analogues à celles dégagées ci-avant.

On peut donc mettre en évidence une structure commune à ces ensembles, structure qu'on appellera espace vectoriel, même si les éléments de l'ensemble ne sont pas des vecteurs au sens de ce qui a été vu dans l'enseignement secondaire.

2. Structure d'espace vectoriel

Définition 1.

On appelle **espace vectoriel** sur $\mathbf{K}$ (ou $\mathbf{K}$ -espace vectoriel) tout triplet $(E, +, \cdot)$ où E est un ensemble non vide, $+: E \times E \longrightarrow E$ est une loi interne et $\cdot: \mathbf{K} \times E \longrightarrow E$ est une loi externe qui vérifient les propriétés suivantes.

EV1 : $\forall u, v \in E, u + v = v + u$ (commutativité)

EV2 : $\forall u, v, w \in E, (u + v) + w = u + (v + w)$ (associativité)

EV3 : $\exists 0_E \in E, \forall u \in E, 0_E + u = u + 0_E = u$.

0_E est l'élément neutre de l'addition, il est appelé **vecteur nul**.

EV4 : $\forall u \in E, \exists v \in E, u + v = v + u = 0_E$.

Tout élément possède un opposé pour la loi $+$. L'opposé de u est noté $-u$. On peut montrer en combinant les quatre propriétés précédentes que cet opposé est unique.

EV5 : $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \forall u \in E, (\alpha + \beta) \cdot u = (\alpha \cdot u) + (\beta \cdot u)$ (distributivité par rapport à la somme de scalaires)

EV6 : $\forall \alpha \in \mathbf{K}, \forall u, v \in E, \alpha \cdot (u + v) = (\alpha \cdot u) + (\alpha \cdot v)$ (distributivité par rapport à la somme de vecteurs)

EV7 : $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \forall u \in E, (\alpha\beta) \cdot u = \alpha(\beta \cdot u)$ (associativité mixte)

EV8 : $\forall u \in E, 1 \cdot u = u$. L'élément unité de $\mathbf{K}$ est un élément neutre pour la multiplication externe.

Les éléments de $\mathbf{K}$ sont appelés des **scalaires**, ceux de E des **vecteurs**.

Notation 2. Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Lorsque λ est un scalaire et u un vecteur, on écrira λu pour $\lambda \cdot u$, mais pas $u\lambda$.

On notera également $u - v$ pour désigner $u + (-v)$.

2.1. Exemples fondamentaux

Les exemples suivants sont fondamentaux, il faut les connaître.

- $(\mathbf{R}, +, \times)$ est un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel. Ici, la loi externe est la loi de multiplication des réels. Le vecteur nul est 0 .
- $(\mathbf{C}, +, \times)$ est un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel, avec $\times: \mathbf{C} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$
 $(\lambda, z) \longmapsto \lambda \times z$
 $(\mathbf{C}, +, \times)$ est aussi un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel, avec cette fois $\times: \mathbf{R} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$
 $(\lambda, z) \longmapsto \lambda \times z$
- L'ensemble $(\vec{\mathcal{P}}, +, \cdot)$ des vecteurs de la géométrie plane avec l'addition classique des vecteurs et la multiplication par un réel est un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.
Idem pour l'ensemble $(\vec{\mathcal{E}}, +, \cdot)$ des vecteurs de la géométrie dans l'espace.
- $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$ est un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel, où les opérations sont définies par

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \longmapsto & (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \end{array} \quad \text{et} \quad \cdot : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (\lambda, (x_1, x_2)) & \longmapsto & (\lambda x_1, \lambda x_2) \end{array}$$

Le vecteur nul est $0_{\mathbf{R}^2} = (0, 0)$.

Plus généralement, si $n \in \mathbf{N}^*$, $(\mathbf{K}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel.

- $(\mathbf{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Le vecteur nul est le polynôme nul.
- $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Le vecteur nul est la matrice nulle $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})}$.

- Soit Ω un ensemble quelconque non vide. On s'intéresse à l'ensemble $\mathbf{K}^\Omega = \mathcal{F}(\Omega, \mathbf{K})$ des applications de Ω dans $\mathbf{K}$, qu'on munit d'une loi de composition interne :

$$+ : \mathbf{K}^\Omega \times \mathbf{K}^\Omega \longrightarrow \mathbf{K}^\Omega$$

$$(f, g) \longmapsto \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \Omega \\ x & \longmapsto & f(x) +_{\mathbf{K}} g(x) \end{array} \right]$$

ainsi que d'une loi de composition externe :

$$\cdot : \mathbf{K} \times \mathbf{K}^\Omega \longrightarrow \mathbf{K}^\Omega$$

$$(\lambda, g) \longmapsto \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \Omega \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot_{\mathbf{K}} g(x) \end{array} \right]$$

$(\mathcal{F}(\Omega, \mathbf{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Le vecteur nul est

$$0 : \Omega \longrightarrow \mathbf{K}$$

$$x \longmapsto 0$$

Cet exemple est fondamental. En effet, il inclut les cas particuliers suivants :

- Si $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\mathcal{F}(\Omega, \mathbf{K}) = \mathbf{K}^n$ et on retrouve l'exemple cité plus haut.
 - Si $\Omega = \mathbf{N}$, alors $\mathbf{K}^\mathbf{N}$, l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbf{K}$, muni de l'addition classique des suites et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Le vecteur nul est la suite nulle $(0)_{n \in \mathbf{N}}$.
 - Si D est une partie de $\mathbf{R}$, l'ensemble des fonctions de D dans $\mathbf{R}$, muni de l'addition de fonctions et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel, dont le vecteur nul est $0 : D \longrightarrow \mathbf{R}$.
- $$x \longmapsto 0$$
- On peut encore généraliser l'exemple précédent. Soit $(E, \star, \bullet)$ un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et Ω un ensemble quelconque. On munit alors l'ensemble $\mathcal{F}(\Omega, E)$ des applications de Ω vers E des opérations

$$\boxplus : \mathcal{F}(\Omega, E) \times \mathcal{F}(\Omega, E) \longrightarrow \mathcal{F}(\Omega, E)$$

$$(f, g) \longmapsto \left[\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x) \star g(x) \end{array} \right]$$

et

$$\boxdot : \mathbf{K} \times \mathcal{F}(\Omega, E) \longrightarrow \mathcal{F}(\Omega, E)$$

$$(\lambda, f) \longmapsto \left[\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda \bullet f(x) \end{array} \right]$$

$(\mathcal{F}(\Omega, E), \boxplus, \boxdot)$ est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et le vecteur nul est $0 : \Omega \longrightarrow \mathbf{K}$.

$$x \longmapsto 0$$

Par exemple, on peut choisir $\Omega = [0; 1]$ et $E = \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$, qui est bien un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel. On définit

$$f : [0; 1] \longrightarrow \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad g : [0; 1] \longrightarrow \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} t & 2 & 4 \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix} \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

deux vecteurs de $\mathcal{F}([0, 1], \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R}))$. Alors

$$f \boxplus g : [0; 1] \longrightarrow \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} t & 3 & 4+t \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 3. On peut toujours considérer les $\mathbf{C}$ -espaces vectoriels E comme des $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels : il suffit de restreindre la loi externe $\cdot : \mathbf{C} \times E \longrightarrow E$ à $\mathbf{R} \times E : \cdot : \mathbf{R} \times E \longrightarrow E$. Par exemple, $\mathbf{C}[X]$ est un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel, mais c'est également un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel. De même, $\mathbf{C}^\mathbf{N}$ est un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel et également un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.

2.2. Premières propriétés

Proposition 4.

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Alors pour tout $(\lambda, x) \in \mathbf{K} \times E$,

$$\lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbf{K}} \text{ ou } x = 0_E.$$

Démonstration. • Soit $x \in E$. Alors $0_{\mathbf{K}} \cdot x = (0_{\mathbf{K}} + 0_{\mathbf{K}}) \cdot x = 0_{\mathbf{K}} \cdot x + 0_{\mathbf{K}} \cdot x$ d'après EV5.

D'après EV4, tout vecteur de E possède un opposé, donc :

$$\begin{aligned} 0_E &= 0_{\mathbf{K}} \cdot x + (-0_{\mathbf{K}} \cdot x) \\ &= (0_{\mathbf{K}} \cdot x + 0_{\mathbf{K}} \cdot x) + (-0_{\mathbf{K}} \cdot x) \\ &= 0_{\mathbf{K}} \cdot x + (0_{\mathbf{K}} \cdot x + (-0_{\mathbf{K}} \cdot x)) && \text{EV2} \\ &= 0_{\mathbf{K}} \cdot x + 0_E && \text{EV4} \\ &= 0_{\mathbf{K}} \cdot x && \text{EV3} \end{aligned}$$

- Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors, $\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$. (EV3) et (EV6)

D'après EV4, tout vecteur de E possède un opposé, donc :

$$\begin{aligned} 0_E &= \lambda \cdot 0_E + (-\lambda \cdot 0_E) \\ &= (\lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E) + (-\lambda \cdot 0_E) \\ &= \lambda \cdot 0_E + (\lambda \cdot 0_E + (-\lambda \cdot 0_E)) && \text{EV2} \\ &= \lambda \cdot 0_E + 0_E && \text{EV4} \\ &= \lambda \cdot 0_E && \text{EV3} \end{aligned}$$

- Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$ tels que $\lambda \cdot x = 0_E$. Montrons que $\lambda = 0_{\mathbf{K}}$ ou $x = 0_E$.

Si $\lambda = 0_{\mathbf{K}}$, le résultat est obtenu.

Si $\lambda \neq 0_{\mathbf{K}}$, alors $\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0_E = 0_E$ d'après le premier point.

Or, $\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = (\frac{1}{\lambda} \lambda) \cdot x$ d'après EV7, donc $\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = 1 \cdot x = x$ par EV8. Donc $x = 0_E$. $\square$

Proposition 5.

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel. Alors,

1. $\forall x \in E, (-1) \cdot x = -x$ (opposé de x).
2. $\forall \alpha \in \mathbf{K}, \forall \beta \in \mathbf{K}, \forall x \in E, (\alpha - \beta) \cdot x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x = \alpha \cdot x + (-\beta \cdot x)$.
3. $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall x \in E, \forall y \in E, \lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$.

Démonstration. 1. Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} x + (-1) \cdot x &= 1 \cdot x + (-1) \cdot x && \text{EV8} \\ &= (1 + (-1)) \cdot x && \text{EV6} \\ &= 0_{\mathbf{K}} \cdot x \\ &= 0_E && \text{avec la proposition précédente.} \end{aligned}$$

2. EV5 et le point 1.

3. EV6 et le point 1.

$\square$

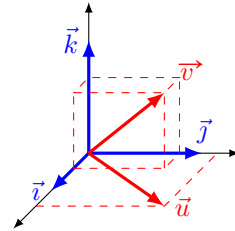
2.3. Combinaisons linéaires de vecteurs

Définition 6.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E . On dit qu'un vecteur u de E est une **combinaison linéaire** des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbf{K}$ tels que

$$u = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

La notion de combinaison linéaire est géométriquement très simple à représenter dans le plan (ou dans l'espace). Sur la figure ci-contre, $\vec{u}$ est combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$, mais ça n'est pas le cas de $\vec{v}$. Par contre, dans l'espace, tout vecteur est combinaison linéaire de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.



Exemple 7. 1. On se place dans un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. Soient u et v deux vecteurs de E . Alors, $u, -v, 2u - 4v$ sont des combinaisons linéaires de u et v .

2. Dans le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel $(\mathbf{R}^3, +, \cdot)$, le vecteur $(3, -2, 4)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ et $k = (0, 0, 1)$ car

$$(3, -2, 4) = 3 \cdot i - 2 \cdot j + 4 \cdot k.$$

3. On se place dans le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel $(\mathbf{R}[X], +, \cdot)$. Alors le polynôme $2X^7 + 3X^4 - X^3 + X - 8$ est une combinaison linéaire des polynômes $X^7, X^6, X^5, X^4, X^3, X^2, X$, et 1 car

$$2X^7 + 3X^4 - X^3 + X - 8 = 2 \cdot X^7 + 0 \cdot X^6 + 0 \cdot X^5 + 3 \cdot X^4 + (-1) \cdot X^3 + 0 \cdot X^2 + 1 \cdot X + (-8) \cdot 1.$$

Exercice d'application 8. Dans $\mathbf{R}^3$, $x = (2, 3, 5)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$?

↪ Soit $a, b, c \in \mathbf{R}$. On a

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = x \iff \begin{cases} a + b = 2 \\ b + c = 3 \\ a + c = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

donc $2e_1 + e_3 = x$ et ainsi x est combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2 et e_3 .

Exercice d'application 9. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. La matrice A^2 est-elle combinaison linéaire de A et I_2 ?

↪ Soit $a, b \in \mathbf{R}$.

$$A^2 = aA + bI_2 \iff \begin{cases} a + b = 7 \\ 2a = 10 \\ 3a = 15 \\ 4a + b = 22 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 5 \\ b = 2 \end{cases}$$

Ainsi $A^2 = 5A + 2I_2$, donc A^2 est combinaison linéaire des matrices A et I_2 .

Exercice d'application 10. Dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, $u = (n^2)_{n \in \mathbf{N}}$ est-elle combinaison linéaire de $v = (1)_{n \in \mathbf{N}}$ et $w = (n)_{n \in \mathbf{N}}$?

↪ Soit $a, b \in \mathbf{K}$.

$$u = av + bw \iff \forall n \in \mathbf{N}, \quad n^2 = a + bn.$$

On obtient donc un système d'une infinité d'équations. On peut pas continuer à raisonner par équivalences. On procède donc plutôt par analyse/synthèse.

Analyse. Supposons $u = av + bw$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n^2 = a + bn$, donc en particulier $a = 0$ et $b = 1$ (pour $n = 0$ et $n = 1$). Ainsi $n^2 = n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, ce qui est absurde.

Donc il n'existe pas de scalaires a et b tels que $u = av + bw$: la suite u n'est pas combinaison linéaire des suites v et w .

Remarque technique 11. Si f , g et h sont trois fonctions telles que $f = ag + bh$, où l'on souhaite déterminer a et b des scalaires, on peut exploiter les égalités en certaines valeurs. On peut aussi utiliser l'égalité des limites (lorsqu'elles existent) ou, dans le cas de fonctions dérivables, l'égalité des dérivées.

Exercice d'application 12. Dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, $f : x \mapsto \operatorname{ch}(2x)$ est-elle combinaison linéaire de sh^2 et ch^2 ?

↔ A nouveau, on ne peut pas raisonner directement par équivalences (car dire que deux fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ sont égales revient à dire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = g(x)$ ce qui conduit à une infinité d'équations). On préfère ici conduire une analyse-synthèse.

Analyse. Supposons qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que $f = \lambda \operatorname{sh}^2 + \mu \operatorname{ch}^2$. Alors, pour tout nombre réel x , $\operatorname{ch}(2x) = \lambda \operatorname{sh}^2(x) + \mu \operatorname{ch}^2(x)$. En particulier, $1 = \mu$ (pour $x = 0$) et $\operatorname{ch}(2) = \lambda \operatorname{sh}^2(1) + \operatorname{ch}^2(1)$, donc $2e^2 + 2e^{-2} = \lambda(e^2 - 2 + e^{-2}) + e^2 + 2 + e^{-2}$ puis $\lambda = 1$. Par conséquent, si λ et μ existent, alors $\lambda = \mu = 1$ et $f = \operatorname{sh}^2 + \operatorname{ch}^2$.

Synthèse. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\operatorname{sh}(x)^2 + \operatorname{ch}(x)^2 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch}(2x).$$

Ainsi, $f = \operatorname{sh}^2 + \operatorname{ch}^2$.

Conclusion. Finalement, f est combinaison linéaire des fonctions sh^2 et ch^2 .

⚠ Attention ⚠. S'il y a ambiguïté sur le corps de base (E est-il considéré comme un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel ou comme un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel ?), il est important de le préciser.

Par exemple, $1 + i$ est combinaison linéaire de 1 et 2 dans le $\mathbf{C}$ -espace vectoriel $(\mathbf{C}, +, \times)$ (puisque $1 + i = (1 + i) \cdot 1 + 0 \cdot 2$ par exemple), mais $1 + i$ n'est pas combinaison linéaire de 1 et 2 dans le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel $(\mathbf{C}, +, \times)$ (car $\operatorname{Im}(1 + i) = 1 \neq 0 = \operatorname{Im}(a \cdot 1 + b \cdot 2)$ pour tous $a, b \in \mathbf{R}$).

⚠ Attention ⚠. En général, $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k$ n'implique pas $\lambda_k = \mu_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Autrement dit, on ne peut pas faire d'identification quand on a deux décompositions linéaires avec les mêmes vecteurs, car une telle décomposition n'est *a priori* pas unique. Par exemple,

$$(1, 1) + 2(0, 1) + 2(1, 0) = (3, 3) = 2(1, 1) + (0, 1) + (1, 0).$$

3. Sous-espaces vectoriels

Dans toute cette partie, $(E, +, \cdot)$ désigne un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel

3.1. Définition et exemples à connaître

Définition 13.

Soit F une partie de E . On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si

SEV1 : $\forall u, v \in F, \quad u + v \in F$ (F est stable par addition)

SEV2 : $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \lambda \cdot u \in F$ (F est stable par multiplication externe)

SEV3 : $0_E \in F$.

Proposition 14.

Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors, F muni de l'addition et de la multiplication externe définies sur E (ou plutôt des restrictions de ces lois à F , dites **lois induites**) est **K-espace vectoriel**.

Démonstration. • F est bien non vide car $0_E \in F$.

- $+$ est bien une loi interne à F d'après SEV 1.
- EV1 et EV2 sont vérifiées car les éléments de F sont aussi des éléments de E .
- $0_E \in F$ par SEV3 donc EV3 est vérifiée. Et $0_F = 0_E$.
- Montrons que les opposés des éléments de F sont aussi dans F .
Soit $x \in F$. Alors, par SEV2, $(-1) \cdot x \in F$. Or, dans E , on sait que $(-1) \cdot x = -x$ est l'opposé de x . Donc $-x \in F$. EV4 est bien vérifiée.
- Les propriétés EV5, EV6, EV7, EV8 sont vérifiées car les éléments de F sont aussi des éléments de E . □

En pratique, pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, on utilise plutôt la proposition suivante.

Proposition 15 - Caractérisation des sous-espaces vectoriels.

Soit F une partie de E .

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si il vérifie les deux propriétés suivantes :

1. $0_E \in F$.
2. $\forall x \in F, \forall y \in F, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \lambda \cdot x + y \in F$.

Démonstration. • Supposons que F soit un sous-espace vectoriel de E . Par définition, $0_E \in F$.

Soient $x, y \in F, \lambda \in \mathbf{K}$. Alors, par SEV2, $\lambda \cdot x \in F$ et par SEV1, $\lambda \cdot x + y \in F$.

- Soit F une partie de E vérifiant
 1. $0_E \in F$.
 2. $\forall x \in F, \forall y \in F, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \lambda \cdot x + y \in F$.

Alors, on a bien $0_E \in F$ (SEV3).

Soient x et y dans F . Alors, $1 \cdot x + y \in F$, donc $x + y \in F$ (SEV1).

Soient $\lambda \in \mathbf{K}, x \in F$. Comme $0_E \in F, \lambda \cdot x + 0_E \in F$, donc $\lambda \cdot x \in F$ (SEV2). □

Exemple 16. • Les ensembles $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (dits **sous-espaces vectoriels triviaux**).

- Dans le plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ de la géométrie vectorielle plane, les droites vectorielles sont des sous-espaces vectoriels. Rappelons qu'une droite vectorielle est un ensemble $\{k\vec{u} : k \in \mathbf{K}\}$ (où $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}} \setminus \{\vec{0}\}$), soit l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$.
- Dans l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ de la géométrie vectorielle dans l'espace, les droites vectorielles et les plans vectoriels (*i.e.* les ensembles de la forme $\{a\vec{u} + b\vec{v} : a, b \in \mathbf{K}\}$, où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires) sont des sous-espaces vectoriels.

Exercice d'application 17. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que

$$F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.

↔ On a bien $F \subset \mathbf{R}^n$.

1. Le vecteur nul de $\mathbf{R}^n$ est $0_{\mathbf{R}^n} = (0, 0, \dots, 0)$. Comme $0 + 0 + \dots + 0 = 0$, $0_{\mathbf{R}^n} \in F$.
2. Soit $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F$, $v = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in F$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors, d'après les définitions,

et

S_n est bien un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{C}), +, \cdot)$.

Exercice d'application 26. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}^n(I)$ des fonctions à valeurs réelles n fois continûment dérivables est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(I, \mathbf{R}), +, \cdot)$ (ici, les vecteurs sont donc les applications de I dans $\mathbf{R}$).

↪

- $\mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{F}$.
- Soit θ la fonction nulle. θ est n fois dérivable et $\theta^{(n)} = \theta$. En particulier, θ est continue sur I donc $\theta^{(n)}$ est continue sur I . Finalement, $\theta \in \mathcal{C}^n(I)$.
- Soient $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. D'après le cours de dérivation, $\lambda \cdot f + g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , donc $\lambda \cdot f + g \in \mathcal{C}^n(I)$.

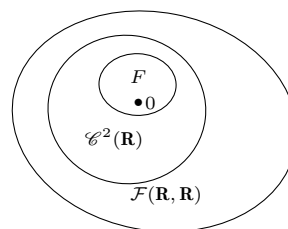
$\mathcal{C}^n(I)$ est bien un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(I, \mathbf{R}), +, \cdot)$.

Exercice d'application 27. Considère

$$F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}) \mid f'' + 3f' + 4f = 0\}$$

(0 est ici la fonction nulle).

Montrer que F est un sous-espace vectoriel du $\mathbf{R}$ -espace vectoriel $(\mathcal{C}^2(\mathbf{R}), +, \cdot)$.



↪

- $F \subset \mathcal{C}^2$.
- Soit θ la fonction nulle sur $\mathbf{R}$. θ est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\theta' = \theta$, $\theta'' = \theta$. Ainsi, $\theta'' + 3\theta' + 4\theta = 8\theta = \theta = 0$. Donc $\theta \in F$.
- Soit $(\lambda, f, g) \in \mathbf{R} \times F^2$. On pose $h = \lambda f + g$. Montrons que $h \in F$. h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ et $h' = \lambda f' + g'$, $h'' = \lambda f'' + g''$. Donc,

$$\begin{aligned} h'' + 4h' + 3h &= (\lambda f'' + g'') + 3(\lambda f' + g') + 4(\lambda f + g) \\ &= \lambda(f'' + 4f' + 3f) + (g'' + 4g' + 3g) \\ &= \lambda 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Donc $h \in F$.

Ainsi F est un sous-espace vectoriel du $\mathbf{R}$ -espace vectoriel $(\mathcal{C}^2(\mathbf{R}), +, \cdot)$.

Proposition 28.

Soit F un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$. Alors F est stable par combinaison linéaire de ses vecteurs :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n \in F, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}, \quad \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in F.$$

Démonstration.

Soit $(x_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ une famille de vecteurs de F et $(\lambda_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ une famille de scalaires de $\mathbf{K}$. Posons pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, H_n : « $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in F$ ».

On a $\lambda_1 x_1 \in F$ car F est stable par produit externe, donc H_1 est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que H_n soit vraie. On a $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = (\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k) + \lambda_{n+1} x_{n+1}$. Or, via H_n , $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in F$.

De plus, puisque F est stable par produit externe, $\lambda_n x_n \in F$. Enfin, puisque F est stable par somme, $(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k) + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in F$. Donc H_{n+1} est vraie.

Le principe de récurrence assure que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, H_n est vraie. □

3.2. Sous-espace vectoriel engendré

Définition 29.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E . L'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, \dots, x_n$ est appelé **sous-espace vectoriel engendré** par $x_1, \dots, x_n$ et se note $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

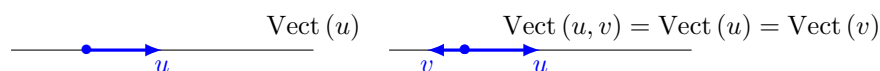
$$\begin{aligned}\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) &= \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}\} \\ &= \{u \in E \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}, u = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n\}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout vecteur u de E , on a l'équivalence

$$u \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n) \iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}, \text{ tels que } u = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Définition 30.

On appelle **droite vectorielle** de E un sous-espace vectoriel D de E qu'on peut écrire $D = \text{Vect}(u)$ avec $u \in E$. On dit que u est un **vecteur directeur** de D . Par définition, $D = \{\lambda \cdot u : \lambda \in \mathbf{K}\}$.



Définition 31.

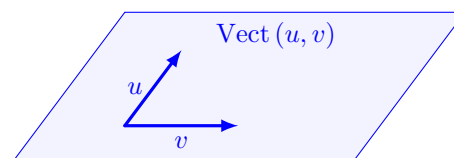
Soient u et v deux vecteurs de E . On dit que u et v sont **colinéaires** lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.

Exemple 32. Dans $\mathbf{R}[X]$, X^2 et $3X^2$ sont colinéaires.

Définition 33.

On appelle **plan vectoriel** de E un sous-espace vectoriel P de E qu'on peut écrire $P = \text{Vect}(u, v)$ où u et v sont deux vecteurs non colinéaires de E . On a alors, par définition,

$$P = \{\lambda \cdot u + \mu \cdot v : \lambda, \mu \in \mathbf{K}\}.$$



Exemple 34. • Dans $\mathbf{R}^2$, posons $e_1 = (2, 1)$. Alors

$$\text{Vect}(e_1) = \{\lambda \cdot e_1 : \lambda \in \mathbf{R}\} = \{(2\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

• Dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$\text{Vect}(I_2, A) = \{\lambda_1 I_2 + \lambda_2 A : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R} \right\}.$$

△ Attention △. A nouveau, lorsqu'il y a ambiguïté, il est important de préciser si l'on travaille dans un **R**-espace vectoriel ou dans un **C**-espace vectoriel, ce qui l'on peut éventuellement indiquer en précisant $\text{Vect}_{\mathbf{C}}$ ou $\text{Vect}_{\mathbf{R}}$.

Par exemple, $\text{Vect}(1) = \{\lambda \cdot 1 : \lambda \in \mathbf{C}\} = \mathbf{C}$ dans le **C**-espace vectoriel $(\mathbf{C}, +, \times)$. Par contre, $\text{Vect}(1) = \{\lambda \cdot 1 : \lambda \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$ dans le **R**-espace vectoriel $(\mathbf{C}, +, \times)$. On pourra ainsi écrire $\text{Vect}_{\mathbf{C}}(1) = \mathbf{C}$ et $\text{Vect}_{\mathbf{R}}(1) = \mathbf{R}$.

Lemme 35.

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E . Alors $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. 1. $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subset E$.

2. $0_E = 0_{\mathbf{K}}x_1 + 0_{\mathbf{K}}x_2 + \dots + 0_{\mathbf{K}}x_n$. Donc $0_E \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

3. Soient $u, v \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $\alpha \in \mathbf{K}$.

$u \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ donc il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $u = \lambda_1x_1 + \dots + \lambda_nx_n$.

$v \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ donc il existe $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbf{K}$ tels que $v = \mu_1x_1 + \dots + \mu_nx_n$. Alors,

$$\begin{aligned} \alpha \cdot u + v &= \alpha \cdot (\lambda_1x_1 + \dots + \lambda_nx_n) + (\mu_1x_1 + \dots + \mu_nx_n) \\ &= \alpha \cdot (\lambda_1x_1) + \dots + \alpha \cdot (\lambda_nx_n) + \mu_1x_1 + \dots + \mu_nx_n \end{aligned} \quad (\text{EV6})$$

$$= (\alpha \times \lambda_1) \cdot x_1 + \dots + (\alpha \times \lambda_n) \cdot x_n + \mu_1x_1 + \dots + \mu_nx_n \quad (\text{EV7})$$

$$= (\alpha \times \lambda_1 + \mu_1) \cdot x_1 + \dots + (\alpha \times \lambda_n + \mu_n) \cdot x_n \quad (\text{EV5})$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\alpha \times \lambda_i + \mu_i \in \mathbf{K}$, donc $\alpha \cdot u + v \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est bien un sous-espace vectoriel de E . □

Théorème 36.

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E .

$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) qui contient à la fois $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Cela signifie que pour tout sous-espace vectoriel G de E contenant $x_1, x_2, \dots, x_n$, on a $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subset G$.

Démonstration. • On a montré dans le lemme que $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel de E .

De plus, $x_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n$, donc $x_1 \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

De même, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_{i-1} + 1 \cdot x_i + 0 \cdot x_{i+1} + \dots + 0 \cdot x_n$, donc $x_i \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Donc $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est bien un sous-espace vectoriel de E contenant $x_1, \dots, x_n$.

• Reste à montrer que c'est le plus petit. Soit G un sous-espace vectoriel de E contenant $x_1, \dots, x_n$.

Soit $u \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Alors u s'écrit $\lambda_1x_1 + \dots + \lambda_nx_n$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$. Or, $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments de G et G est un sous-espace vectoriel, donc est stable par combinaison linéaire de ses vecteurs, donc $\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n \in G$, c'est à dire $u \in G$.

Donc $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subset G$. □

Exemple 37. • Soit $F = \{3aX^2 + (a+b)X - b : (a, b) \in \mathbf{C}^2\}$. On a $F = \text{Vect}(3X^2 + X, X - 1)$, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}[X]$.

• Reprenons l'Exercice d'application 22. On a

$$F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x - y = 0\} = \{(x, 2x) : x \in \mathbf{R}\} = \{(x \cdot (1, 2)) : x \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}((1, 2)),$$

donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$.

- Reprenons l'Exercice d'application 24. L'équation différentielle $y' + \frac{1}{1+x^2}y = 0$ admet comme ensemble de solution

$$F = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \lambda e^{-\text{Arctan}(x)} \quad : \lambda \in \mathbf{R} \end{array} \right\} = \text{Vect} \left(x \longmapsto e^{-\text{Arctan}(x)} \right)$$

donc F est l'espace vectoriel engendré par le vecteur $x \longmapsto e^{-\text{Arctan}(x)}$ du $\mathbf{R}$ -espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$: c'est en particulier un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.

Exercice d'application 38. Montrer que $F = \{u \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0\}$ est un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel.

$\hookrightarrow$ Première méthode.

- $F \subset \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.
- La suite nulle appartient à F .
- Soit $(\lambda, u, v) \in \mathbf{C} \times F^2$. Posons $w = u + \lambda v$. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} w_{n+2} + w_{n+1} + w_n &= u_{n+2} + \lambda v_{n+2} + u_{n+1} + \lambda v_{n+1} + u_n + \lambda v_n \\ &= u_{n+2} + u_{n+1} + u_n + \lambda(v_{n+2} + v_{n+1} + v_n) \\ &= 0 + \lambda \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $w \in F$.

Finalement F est un sous-espace vectoriel du $\mathbf{C}$ -espace vectoriel $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. En particulier, F est un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel.

Seconde méthode. Les suites de F sont les suites récurrentes linéaires d'ordre deux dont le polynôme caractéristique associé est $P = X^2 + X + 1$. Les racines de P sont $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Donc, d'après le cours sur les suites,

$$F = \left\{ \left(a \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right)^n + b \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right)^n \right)_{n \in \mathbf{N}} : (a, b) \in \mathbf{C}^2 \right\}.$$

Par conséquent, en notant $u = \left(\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right)^n \right)_{n \in \mathbf{N}}$ et $v = \left(\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right)^n \right)_{n \in \mathbf{N}}$, on a

$$F = \{au + bv : (a, b) \in \mathbf{C}^2\} = \text{Vect}(u, v).$$

F est donc un sous-espace vectoriel du $\mathbf{C}$ -espace vectoriel $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. En particulier, F est un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel.

Exercice d'application 39. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y + 3z + 4t = 0\}$. Montrer que F est un plan vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

$\hookrightarrow$ Soit $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^4$. Alors

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in F &\iff \begin{cases} \boxed{1}.x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \boxed{1}.x + y + z + t = 0 \\ \boxed{1}.y + 2z + 3t = 0 \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}, \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = -2\lambda - 3\mu \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}, (x, y, z, t) = (\lambda + 2\mu, -2\lambda - 3\mu, \lambda, \mu) \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}, (x, y, z, t) = (\lambda, -2\lambda, \lambda, 0) + (2\mu, -3\mu, 0, \mu) \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}, (x, y, z, t) = \lambda(1, -2, 1, 0) + \mu(2, -3, 0, 1) \\ &\iff (x, y, z, t) \in \text{Vect}(u, v) \end{aligned}$$

avec $u = (1, -2, 1, 0)$ et $v = (2, -3, 0, 1)$. Donc $F = \text{Vect}(u, v)$, en particulier, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

u et v n'étant pas colinéaires, F est un plan vectoriel.

Exercice d'application 40. Soit $G = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid \tilde{P}(1) = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$ en l'écrivant sous la forme $F = \text{Vect}(\dots)$.

$\hookrightarrow$ Soit P un polynôme quelconque de $\mathbf{R}_3[X]$. Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ tel que $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

$$\begin{aligned} P \in G &\iff \tilde{P}(1) = 0 \\ &\iff a + b + c + d = 0 \\ &\iff \lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} a = -\lambda - \mu - \nu \\ b = \lambda \\ c = \mu \\ d = \nu \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}, \quad P = (-\lambda - \mu - \nu)X^3 + \lambda X^2 + \mu X + \nu \\ &\iff \exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}, \quad P = \lambda(-X^3 + X^2) + \mu(-X^3 + X) + \nu(-X^3 + 1) \\ &\iff P \in \text{Vect}(-X^3 + X^2, -X^3 + X, -X^3 + 1) \end{aligned}$$

Donc $F = \text{Vect}(-X^3 + X^2, -X^3 + X, -X^3 + 1)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_3[X]$.

Autre méthode : Soit $P \in \mathbf{R}_3[X]$.

$$\begin{aligned} P \in F &\iff \tilde{P}(1) = 0 \\ &\iff 1 \text{ est racine de } P \\ &\iff X - 1 \mid P \\ &\iff \exists Q \in \mathbf{R}_2[X], \quad P = (X - 1)Q \\ &\iff \exists a, b, c \in \mathbf{R}, \quad P = (X - 1)(aX^2 + bX + c) \\ &\iff \exists a, b, c \in \mathbf{R}, \quad P = aX^2(X - 1) + bX(X - 1) + c(X - 1) \\ &\iff \exists a, b, c \in \mathbf{R}, \quad P = aX^2(X - 1) + bX(X - 1) + c(X - 1) \\ &\iff P \in \text{Vect}(X^2(X - 1), X(X - 1), X - 1) \end{aligned}$$

Donc $F = \text{Vect}(X^2(X - 1), X(X - 1), X - 1)$.

Remarque 41. Il n'y a donc PAS unicité des vecteurs engendrant un sous-espace vectoriel.

Exercice d'application 42. Soit $H = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}) \mid \forall t \in \mathbf{R}, f''(t) + 2f'(t) + f(t) = 0\}$, c'est à dire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$. Montrer que H est un plan vectoriel.

$\hookrightarrow$ L'équation caractéristique de cette équation différentielle est $r^2 + 2r + 1 = 0$ qui admet une unique solution double -1 .

Donc l'ensemble des solutions de $y'' + 2y' + y = 0$ est

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto (\lambda + \mu t)e^{-t} \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

On pose $g_1 : \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto e^{-t} \end{array}$ et $g_2 : \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto te^{-t} \end{array}$. Ainsi, les solutions de $y'' + 2y' + y = 0$ sont toutes les fonctions f qui peuvent s'écrire $f = \lambda g_1 + \mu g_2$, où $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Donc $F = \text{Vect}(g_1, g_2)$.

Comme g_1 et g_2 ne sont pas colinéaires, H est un plan vectoriel.

En effet, il n'existe pas de réel $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $g_1(t) = \alpha g_2(t)$ ou pour tout $t \in \mathbf{R}$, $g_2(t) = \alpha g_1(t)$.

3.3. Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 43.

Soit I un ensemble. Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E . Alors,

$$G = \bigcap_{i \in I} F_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in F_i\},$$

est un sous-espace vectoriel de E .

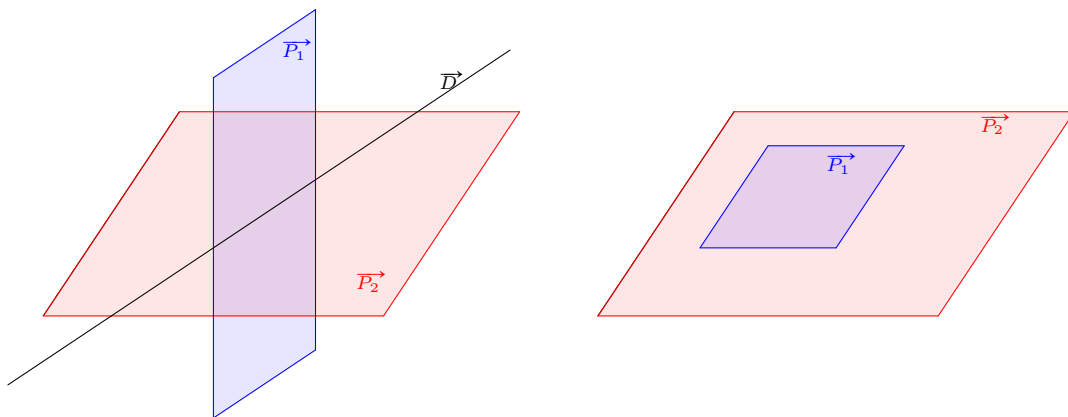
Démonstration. • Pour tout $i \in I$, $F_i \subset E$, donc $G \subset E$.

- Pour tout $i \in I$, F_i est un sous-espace vectoriel de E donc $0_E \in F_i$, donc $0_E \in \bigcap_{i \in I} F_i = G$.
- Soit $\lambda \in \mathbf{K}, x, y \in G$. Montrons que $\lambda \cdot x + y \in G$.
Soit $i \in I$. Alors, $x \in F_i$ et $y \in F_i$. Comme F_i est un sous-espace vectoriel, $\lambda \cdot x + y \in F_i$.
Donc, pour tout $i \in I$, $\lambda \cdot x + y \in F_i$, d'où $\lambda \cdot x + y \in \bigcap_{i \in I} F_i = G$.

Donc G est un sous-espace vectoriel de E .

Remarque 44. Notons que dans la proposition, I est un ensemble quelconque, non nécessairement fini, ni même dénombrable.

Exemple 45. 1. On se place dans l'espace vectoriel $(\vec{\mathcal{E}}, +, \cdot)$ des vecteurs de l'espace de la géométrie dans l'espace. Soient deux plans vectoriels $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ dans $\vec{\mathcal{E}}$.



Alors $\overrightarrow{P_1} \cap \overrightarrow{P_2}$ est soit une droite vectorielle $\overrightarrow{D}$ (qui est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$), soit le plan $\overrightarrow{P_1} = \overrightarrow{P_2}$ (si les deux plans sont confondus).

2. On se place dans le $\mathbf{C}$ -espace vectoriel $\mathbf{C}[X]$. On considère :

$F = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \tilde{P} \text{ est paire}\}$ (vérifier que c'est un bien un sous-espace vectoriel).

$G = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \tilde{P}(42) = 0\}$ (vérifier également que c'est un sous-espace vectoriel).

Alors leur intersection $F \cap G = \{P \in \mathbf{C}[X] \mid \tilde{P} \text{ est paire et } \tilde{P}(42) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}[X]$.

Remarque technique 46. Pour déterminer une intersection d'espaces vectoriels, il est plus simple de décrire ceux-ci à l'aide d'équations.

Exercice d'application 47. Considérons

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 3x + 2y - z = 0\} \quad \text{et} \quad F = \{(2a, b, a + b) : (a, b) \in \mathbf{R}^2\}.$$

Proposition 49.

$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E

Démonstration. • Soit $u \in F + G$. Alors, il existe $f \in F, g \in G, u = f + g$. Puisque f et g sont des éléments de E , on a $u = f + g \in E$. D'où $F + G \subset E$.

- $0_E \in F$ et $0_E \in G$. Donc $0_E + 0_E \in F + G$. Comme $\underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} = 0_E$, on a $0_E \in F + G$.
- Soit $(u, v) \in (F + G)^2, \lambda \in \mathbf{K}$. Alors il existe $(f_1, g_1) \in F \times G$ et $(f_2, g_2) \in F \times G$ tels que $u = f_1 + g_1$ et $v = f_2 + g_2$.

$$\begin{aligned}\lambda u + v &= \lambda(f_1 + g_1) + (f_2 + g_2) \\ &= (\lambda f_1 + f_2) + (\lambda g_1 + g_2).\end{aligned}$$

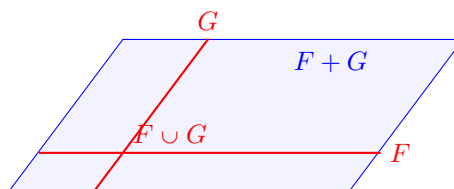
Or $\lambda f_1 + f_2 \in F$ car F est un sous-espace vectoriel de E et $\lambda g_1 + g_2 \in G$ car G est un sous-espace vectoriel de E . Donc $\lambda u + v \in F + G$. Finalement, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E . $\square$

Proposition 50.

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant $F \cup G$.

C'est à dire que pour tout sous-espace vectoriel H de E contenant $F \cup G$, alors

$$F + G \subset H.$$



Démonstration.

Soit H un sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$. Soit $u \in F + G$. Il existe $(f, g) \in F \times G$ tel que $u = f + g$. $F \subset H$ et $G \subset H$ donc $f, g \in H$. Comme H est un sous-espace vectoriel, $f + g \in H$. Ainsi, $F + G \subset H$. $\square$

Exemple 51. Dans le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel $(\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}), +, \cdot)$, on considère le sous-espace vectoriel F des fonctions polynomiales de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et $G = \text{Vect}(\exp)$. On pose

$$\begin{aligned}h : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} & f : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} & g : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto 3x^4 - 2x + 7\exp(x) & x &\longmapsto 3x^4 - 2x & x &\longmapsto 7\exp(x)\end{aligned}$$

Alors, $h \in F + G$ car h est la somme de la fonction f qui appartient à F et de la fonction g qui appartient à G .

Exercice d'application 52. Posons $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Montrer que $\text{Vect}(e_1) + \text{Vect}(e_2) = \mathbf{R}^2$.

$\hookrightarrow$ Il faut démontrer une égalité d'ensembles : procédons par double inclusion.

Les ensembles $\text{Vect}(e_1)$ et $\text{Vect}(e_2)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$, donc $\text{Vect}(e_1) + \text{Vect}(e_2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$. En particulier,

$$\text{Vect}(e_1) + \text{Vect}(e_2) \subset \mathbf{R}^2.$$

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. On remarque que $(x, y) = \underbrace{xe_1}_{\in \text{Vect}(e_1)} + \underbrace{ye_2}_{\in \text{Vect}(e_2)}$, d'où $(x, y) \in \text{Vect}(e_1) + \text{Vect}(e_2)$. Par conséquent,

$$\mathbf{R}^2 \subset \text{Vect}(e_1) + \text{Vect}(e_2).$$

Finalement,

$$\text{Vect}(e_1) + \text{Vect}(e_2) = \mathbf{R}^2.$$

Exercice d'application 53. Posons

$$E = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid P'(0) = 0\} \quad \text{et} \quad F = \text{Vect}(X + 1).$$

Prouver que $E + F = \mathbf{R}[X]$.

$\hookrightarrow$ L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$. Montrons que E en est un également :

- $E \subset \mathbf{R}[X]$.
- $0 \in E$.
- Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}[X]^2$. Alors $(\lambda P + Q)'(0) = P'(0) + \lambda Q'(0) = 0 + \lambda \cdot 0 = 0$ car $P'(0) = 0$ et $Q'(0) = 0$. Il s'ensuit $\lambda P + Q \in E$. Ainsi E est stable par combinaison linéaire.

Finalement, ces trois points assurent que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$. En particulier, $E + F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$, donc $E + F \subset \mathbf{R}[X]$.

Il reste à établir l'inclusion réciproque. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Le but est de prouver que $P \in E + F$, *i.e.* qu'il existe $(Q, T) \in E \times F$ tel que $P = Q + T$. C'est un problème d'existence : on fait l'analyse au brouillon et on ne rédige que la synthèse !

Analyse (au brouillon). Supposons qu'il existe $Q \in E$ et $T \in F$ tel que $P = Q + T$. Puisque $T \in F$, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $T = a(X + 1)$. Puisque $Q \in E$, $Q'(0) = 0$. Ainsi

$$P'(0) = (Q + T)'(0) = Q'(0) + T'(0) = 0 + a$$

donc $a = P'(0)$ et $Q = P - P'(0)(X + 1)$.

Synthèse (à rédiger précisément). Posons $Q = P - P'(0)(X + 1)$ et $T = P'(0)(X + 1)$. Alors $Q + T = P$. De plus, $T \in F$ car $P'(0) \in \mathbf{R}$. Enfin, $Q'(0) = ((P - P'(0)(X + 1))'(0) = P'(0) - P'(0) = 0$, donc $Q \in E$.

Ainsi $P \in E + F$. On vient de montrer que $\mathbf{R}[X] \subset E + F$.

Finalement, on a démontré par double inclusion que $\mathbf{R}[X] = E + F$.

Proposition 54.

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_p)$ deux familles de vecteurs de E . On note $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $G = \text{Vect}(y_1, \dots, y_p)$. Alors,

$$F + G = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p).$$

Démonstration.

On procède par double inclusion.

- Sens $\subset$. Soit $w \in F + G$. Alors il existe $u \in F$ et $v \in G$ tels que $u + v = w$. $u \in F$ donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $u = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$. De même $v \in G$ donc il existe $\mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbf{K}$ tels que $v = \mu_1 y_1 + \dots + \mu_p y_p$.
Alors $w = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \mu_1 y_1 + \dots + \mu_p y_p$.
Donc $w \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$ et $F + G \subset \text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$.
- Sens $\supset$. Soit $w \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$. Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+p} \in \mathbf{K}$ tels que

$$w = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} y_1 + \dots + \lambda_{n+p} y_p.$$

On pose $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ et $y = \lambda_{n+1} y_1 + \dots + \lambda_{n+p} y_p$.

x est une combinaison linéaire d'éléments de F , qui est un sous-espace vectoriel de E donc est stable par combinaison linéaire de ses vecteurs. Donc $x \in F$. De même, y est une combinaison linéaire d'éléments de G et G est un sous-espace vectoriel de E donc $y \in G$.

Donc $w = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$, donc $w \in F + G$.

On a donc $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) \subset F + G$.

Par double inclusion, $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) = F + G$. $\square$

Proposition 55.

Toute combinaison linéaire d'un vecteur de F et d'un vecteur de G est un élément de $F + G$.

Démonstration.

Soit $u \in F$ et $v \in G$, $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$. Alors $\lambda u \in F$ et $\mu v \in G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E . Donc $\lambda x + \mu y \in F + G$. $\square$

3.5. Sous-espaces vectoriels en somme directe

La somme de sous-espaces vectoriels est un outil intéressant, mais elle souffre d'un défaut important : le manque d'unicité des décompositions. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors un vecteur de $F + G$ peut s'écrire de plusieurs façons comme somme d'un vecteur de F et d'un de G .

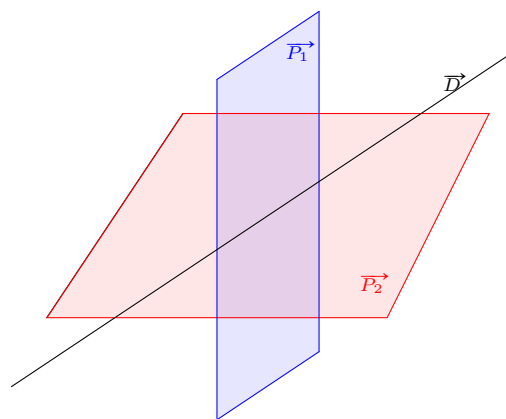
Exemple 56. Dans l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ des vecteurs de la géométrie dans l'espace, on considère deux plans non confondus $\vec{\mathcal{P}}_1$ et $\vec{\mathcal{P}}_2$. Alors leur intersection est une droite vectorielle $\vec{D}$ dirigée par un vecteur $\vec{u}$, qui appartient aux deux plans.

$\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}_1 + \vec{\mathcal{P}}_2$ car $\vec{u} = \vec{u} + \vec{0}$ avec $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}_1$ et $\vec{0} \in \vec{\mathcal{P}}_2$.

Mais $\vec{u}$ s'écrit aussi $\vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$ avec $\vec{0} \in \vec{\mathcal{P}}_1$ et $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}_2$. On peut également écrire $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{u}$ avec $\frac{1}{3}\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}_1$ et $\frac{2}{3}\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}_2$.

Ainsi, il n'y a pas unicité de la décomposition de $\vec{u}$. On a trouvé deux couples différents (et même trois!) $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ et $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ tels que :

$$\begin{cases} \vec{v}_1 \in \vec{\mathcal{P}}_1, \vec{v}_2 \in \vec{\mathcal{P}}_2 \\ \vec{w}_1 \in \vec{\mathcal{P}}_1, \vec{w}_2 \in \vec{\mathcal{P}}_2 \\ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \end{cases}$$



Se pose donc la question : quelle condition doit-on rajouter pour que les décompositions dans $F + G$ soient uniques ?

Définition 57.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont en **somme directe** lorsque tout vecteur de $F + G$ se décompose de manière **unique** en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G . Cette condition peut aussi s'écrire :

$$\forall x, x' \in F, \forall y, y' \in G, \quad x + x' = y + y' \implies \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}.$$

Lorsque la somme de F et G est directe, on la note $F \oplus G$.

Exercice d'application 58. Posons $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Montrer que $\text{Vect}(e_1)$ et $\text{Vect}(e_2)$ sont en somme directe.

$\hookrightarrow$ Soit $a \in \text{Vect}(e_1) + \text{Vect}(e_2)$. Il existe $(f, g) \in \text{Vect}(e_1) \times \text{Vect}(e_2)$ tel que $a = f + g$. Soit $(f_0, g_0) \in \text{Vect}(e_1) \times \text{Vect}(e_2)$ tel que $a = f_0 + g_0$.

Puisque $f \in \text{Vect}(e_1)$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f = \lambda \cdot e_1$. Ainsi $f = (\lambda, 0)$. De même, il existe $\mu, \lambda_0, \mu_0 \in \mathbf{R}$ tels que

$$g = \mu \cdot e_2 = (0, \mu), \quad f_0 = \lambda_0 \cdot e_1 = (\lambda_0, 0), \quad g_0 = \mu_0 \cdot e_2 = (0, \mu_0).$$

Alors $a = f + g = (\lambda, 0) + (0, \mu) = (\lambda, \mu)$ et $a = f_0 + g_0 = (\lambda_0, 0) + (0, \mu_0) = (\lambda_0, \mu_0)$, donc $\lambda = \lambda_0$ et $\mu = \mu_0$. Par conséquent, $f = f_0$ et $g = g_0$. Donc il existe un unique couple $(f, g) \in \text{Vect}(e_1) \times \text{Vect}(e_2)$ tels que $a = f + g$.

Finalement, les sous-espaces vectoriels $\text{Vect}(e_1)$ et $\text{Vect}(e_2)$ sont en somme directe.

Exercice d'application 59. Posons $F = \text{Vect}((1, 0))$ et $G = \text{Vect}((1, 1), (1, -1))$. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils en somme directe ?

$\hookrightarrow F$ et G ne sont pas en somme directe car $(2, 0) \in F + G$ avec

$$(2, 0) = \underbrace{2 \times (1, 0)}_{\in F} + \underbrace{(0, 0)}_{\in G} = \underbrace{(0, 0)}_{\in F} + \underbrace{(1, 1)}_{\in G} + \underbrace{(1, -1)}_{\in G}.$$

Proposition 60 - Une première caractérisation.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . F et G sont en somme directe si et seulement si

$$\forall (x, y) \in F \times G, \quad x + y = 0_E \implies \begin{cases} x = 0_E \\ y = 0_E \end{cases}$$

Démonstration. • Supposons que F et G sont en somme directe.

Soient $x \in F$ et $y \in G$ tels que $x + y = 0_E$. On peut décomposer 0_E en $0_E = 0_E + 0_E$ avec $0_E \in F$ et $0_E \in G$. Comme on a supposé que F et G sont en somme directe, la décomposition de 0_E est unique donc $x = 0_E$ et $y = 0_E$.

- Supposons que

$$\forall x \in F, \forall y \in G, \quad x + y = 0_E \implies \begin{cases} x = 0_E \\ y = 0_E \end{cases}$$

Soient $x, x' \in F$ et $y, y' \in G$ tels que $x + y = x' + y'$. Alors $(x - x') + (y - y') = 0_E$. De plus, $x - x' \in F$ et $y - y' \in G$. Ainsi, d'après l'hypothèse, $x - x' = 0_E$ et $y - y' = 0_E$. Finalement, $x = x'$ et $y = y'$. $\square$

Proposition 61 - Seconde caractérisation.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration. • Supposons que F et G sont en somme directe. Nous allons montrer par double inclusion que $F \cap G = \{0_E\}$.

F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , donc ils contiennent tous les deux 0_E . Donc $\{0_E\} \subset F \cap G$.

Soit $x \in F \cap G$. Alors $x \in F$ et $x \in G$. Montrons que $x = 0_E$.

On peut écrire $x = x + 0_E$ avec $x \in F$ et $0_E \in G$. On peut également écrire $x = 0_E + x$ avec $0_E \in F$ et $x \in G$. Comme F et G sont en somme directe, ces deux décompositions sont identiques, donc $x = 0_E$. Donc $F \cap G \subset \{0_E\}$.

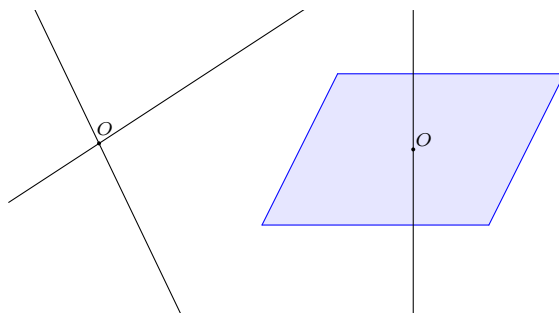
- Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$. Montrons que F et G sont en somme directe.

Soient $x, x' \in F$ et $y, y' \in G$.

On suppose que $x + y = x' + y'$. Alors $x - x' = y - y'$. $x - x' \in F$ et $y - y' \in G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E . Donc $x - x' \in F \cap G = \{0_E\}$, d'où $x - x' = 0_E$ et $x = x'$. Donc $y = y'$.

F et G sont donc en somme directe. $\square$

Exemple 62. Dans $\vec{\mathcal{E}}$ l'espace des vecteurs de la géométrie dans l'espace, deux droites non confondues sont en somme directe, une droite et un plan ne contenant pas cette droite sont en somme directe.



Exercice d'application 63. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$, on pose F l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et $G = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}) \mid g(0) = g'(0) = g''(0)\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$.
2. Montrer que F et G sont en somme directe.

$\hookrightarrow$ Le point 1. est laissé en exercice. Montrons que F et G sont en somme directe. Pour cela, on va montrer que $F \cap G = \{\theta\}$ où θ est la fonction nulle. Procédons par double inclusion.

- Il est facile de voir que $\theta \in F \cap G$. En effet, F et G étant tous deux des sous-espaces vectoriels de E , il contiennent θ . Donc $\{\theta\} \subset F \cap G$.
- Soit $h \in F \cap G$. Alors $h \in F$ et $h \in G$. h est une fonction polynomiale de degré 2, donc il existe a, b et c réels tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x) = ax^2 + bx + c$. On a $h(0) = c$.
Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h'(x) = 2ax + b$. Donc $h'(0) = b$.
Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h''(x) = 2a$. Donc $h''(0) = 2a$.
Comme $h''(0) = h'(0) = h(0)$, on a forcément $a = b = c = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x) = \theta(x)$ donc $h = \theta$. Ainsi, $F \cap G \subset \{\theta\}$.
- Par double inclusion, $F \cap G = \{\theta\}$. Donc F et G sont en somme directe.

3.6. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

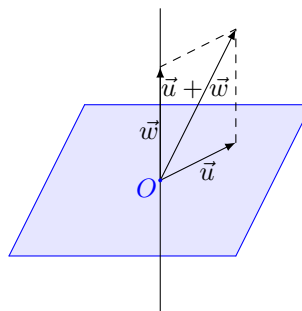
On cherche maintenant à rajouter une nouvelle condition aux sommes directes : pouvoir décomposer TOUS les vecteurs de E comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G . Pour cela, on a besoin de la notion de supplémentaire.

Définition 64.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque tout élément x de E se décompose de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G :

$$\forall x \in E, \exists!(f, g) \in F \times G, \quad x = f + g.$$

Exemple 65. Dans l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ des vecteurs de la géométrie dans l'espace, un plan $\vec{\mathcal{P}}$ et une droite $\vec{\mathcal{D}}$ qui n'est pas incluse dans $\vec{\mathcal{P}}$ sont supplémentaires dans $\vec{\mathcal{E}}$.



Proposition 66 - Une première caractérisation.

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E si et seulement si $F + G = E$ et F et G sont en somme directe.

Démonstration. • Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

Supposons que F et G sont supplémentaires dans E . Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , on sait que $F + G \subseteq E$.

Réciproquement, soit $x \in E$. Alors, $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. Donc $x \in F + G$. D'où $E \subset F + G$ et $E = F + G$ par double inclusion.

Enfin, F et G sont bien en somme directe car tout élément de $F + G$ se décompose de manière unique comme d'un élément de F et d'un élément de G .

- Supposons que $F + G = E$ et F et G sont en somme directe.

Soit $x \in E$. Alors $x \in F + G$. Comme F et G sont en somme directe, x se décompose de manière unique comme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. Donc F et G sont supplémentaires dans E . $\square$

Remarque 67. En particulier, si F et G sont supplémentaires, on note $E = F \oplus G$.

En combinant ce résultat avec seconde caractérisation des sommes directes (cf. Proposition 61), on obtient :

Proposition 68 - Seconde caractérisation.

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E si et seulement si

$$F + G = E \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0_E\}.$$

Exemple 69. 1. Pour $n \in \mathbf{N}$, on déjà vu que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$, les ensembles des matrices respectivement symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. En effet, nous avons démontré que toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ peut s'écrire de manière unique comme $M = A + S$ avec $A \in \mathcal{A}_n$ et $S \in \mathcal{S}_n$.

2. On a aussi déjà vu que toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ se décompose de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Donc

$$\{f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ paire}\} \oplus \{f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ impaire}\} = \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}).$$

Par exemple, la décomposition de $\exp$ est $\exp = \text{ch} + \text{sh}$.

Remarque technique 70. En pratique, pour montrer que F et G sont supplémentaires, on fait un raisonnement par analyse-synthèse, en rédigeant soigneusement la phase d'analyse (qui montre l'unicité de la décomposition) ET la phase de synthèse (qui montre l'existence de la décomposition).

Exercice d'application 71. Dans l'espace vectoriel $(\mathcal{C}^0([0; 1]), +, \cdot)$ qu'on note E , on considère :

$$F = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0; 1]) \mid \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \{ f \in \mathcal{C}^0([0; 1]) \mid f \text{ est constante sur } [0; 1] \}.$$

1. Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^0([0; 1])$.
2. Montrer que $F \oplus G = E$.

Exercice d'application 72. Posons $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Montrer que $F \oplus G = \mathbf{R}^3$.

