

Calcul matriciel, limites et continuité

Exercice 274. On considère l'ensemble

$$E = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K}) \mid \exists (a, b) \in \mathbf{K}^2, M = \begin{pmatrix} -(a+b) & b & a \\ a & -(a+b) & b \\ b & a & -(a+b) \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Montrer qu'il existe deux matrices A et B telles que E soit l'ensemble des combinaisons linéaires de ces deux matrices.
2. Prouver que A^2 , AB , BA et B^2 appartiennent à E . En déduire que E est stable par multiplication, c'est-à-dire que pour tous $M, N \in E$, $MN \in E$.
3. Existe-t-il dans E des matrices dont l'inverse appartient encore à E ?

Corrigé 274. 1. $E = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K}) \mid \exists (a, b) \in \mathbf{K}^2, M = aA + bB \}$, avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -2A + B$, $AB = BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -A - B$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A - 2B$.

On remarque déjà que toute combinaison linéaire d'éléments de E appartient à E (facile à démontrer). Ensuite, soit $M, N \in E$. Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbf{K}^4$ tels que $M = aA + bB$ et $N = cA + dB$. On a $MN = acA^2 + acAB + bcBA + bdB^2$

3. Supposons qu'il existe une matrice inversible $M \in E$ telle que $M^{-1} \in E$. Alors $MM^{-1} \in E$ d'après ce qui précède, i.e. $I_3 \in E$. Supposons qu'il existe $(a, b) \in \mathbf{K}^2$ tel que $I_3 = aA + bB$. Par identification des coefficients d'indice (1, 2) et (1, 3), on obtient $(a, b) = (0, 0)$, ce qui est absurde. Finalement $I_3 \notin E$, ce qui est contradictoire. Ainsi il n'existe dans E aucune matrice dont l'inverse appartient encore à E .

Exercice 275. 1. On introduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1+a_n & a_n & 0 \\ a_n & 1+a_n & 0 \\ a_n & a_n & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Déterminer l'expression du terme général de la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

2. Soit u, v, w les suites définies par la donnée de $u_0 = 1, v_0 = 0, w_0 = 1$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n + v_n, \quad v_{n+1} = u_n + 2v_n, \quad w_{n+1} = u_n + v_n + w_n.$$

Déterminer, à l'aide de la matrice A , l'expression des termes généraux de ces trois suites.

Corrigé 275. 1. (a) Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n : « il existe $a_n \in \mathbf{R}$ tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1+a_n & a_n & 0 \\ a_n & 1+a_n & 0 \\ a_n & a_n & 1 \end{pmatrix}$ ».

On vérifie H_0 en considérant $a_0 = 1$.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vraie.

$$A^{n+1} = A \cdot \begin{pmatrix} 1+a_n & a_n & 0 \\ a_n & 1+a_n & 0 \\ a_n & a_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_n+2 & 3a_n+1 & 0 \\ 3a_n+1 & 3a_n+2 & 0 \\ 3a_n+1 & 3a_n+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

donc en choisissant $a_{n+1} = 3a_n + 1$, on obtient que H_{n+1} est vraie. Le principe de récurrence permet de conclure.

- (b) La relation de récurrence obtenue à la question précédente montre que a est une suite arithmético-géométrique. Le point fixe de $x \mapsto 3x+1$ est $x = -\frac{1}{2}$, on s'intéresse donc à la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $b_n = a_n + \frac{1}{2}$. On a

$$b_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{2} = 3a_n + 1 + \frac{1}{2} = 3b_n - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3b_n$$

d'où, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $b_n = 3^n b_0 = \frac{3^{n+1}}{2}$. Finalement, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$.

2. Posons pour tout $n \in \mathbf{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. On a alors $U_{n+1} = AU_n$, d'où $U_n = A^n U_0$, puis

$$U_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{n+1} + 1 & 3^{n+1} - 1 & 0 \\ 3^{n+1} - 1 & 3^{n+1} + 1 & 0 \\ 3^{n+1} - 1 & 3^{n+1} - 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{n+1} + 1 \\ 3^{n+1} - 1 \\ 3^{n+1} + 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 276. On note J la matrice carrée d'ordre $n \in \mathbf{N}^*$ dont tous les coefficients valent 1.

- Déterminer l'unique matrice échelonnée réduite en lignes équivalente par ligne à la matrice J .
- Pour tout entier naturel non nul p , calculer J^p .
- Soit $\mathcal{E} = \{I + \alpha J : \alpha \in \mathbf{R}\}$.
 - Montrer que $\mathcal{E}$ est stable par produit, c'est-à-dire que pour tous $A, B \in \mathcal{E}$, $AB \in \mathcal{E}$. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}$ la matrice $I + \alpha J$ admet-elle un inverse dans $\mathcal{E}$?
 - En déduire l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- A l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer A^n pour tout entier naturel n .

Corrigé 276. 1. En choisissant le coefficient d'indice $(1, 1)$ comme pivot, on obtient que $J \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$.

- N'importe quel coefficient de J^2 vaut $\sum_{k=1}^n 1 = n$, d'où $J^2 = nJ$. On peut ensuite démontrer par récurrence que

$$J^p = n^{p-1} J.$$

Posons pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $H_p : \ll J^p = n^{p-1} J \gg$.

$J^1 = 1$ et $n^{1-1} J = 1J = J$, donc H_1 est vraie.

Soit $p \in \mathbf{N}^*$ tel que H_p soit vraie. On a

$$J^{p+1} = J \times J^p = J \times (n^{p-1} J) = n^{p-1} J^2 = n^{p-1} nJ = n^p J.$$

Donc H_{p+1} est vraie et le principe de récurrence permet de conclure.

- Soit $A, B \in \mathcal{E}$. Il existe $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tels que $A = I + \alpha J$ et $B = I + \beta J$. On a alors $AB = I + (\alpha + \beta + n\alpha\beta)J \in \mathcal{E}$. Supposons $\alpha \neq 0$. $I + \alpha J$ admet un inverse dans $\mathcal{E}$ si et seulement s'il existe β tel que $(I + \alpha J)(I + \beta J) = I$, si et seulement si $\alpha + \beta + n\alpha\beta = 0$, si et seulement si $\beta(1 + n\alpha) = -\alpha$, si et seulement si $\alpha \neq -\frac{1}{n}$ et $\beta = \frac{-\alpha}{1 + n\alpha}$.
 - On cherche à écrire A sous la forme $A = b(I + \alpha J)$. On a $\begin{cases} b\alpha + b &= 5 \\ b\alpha &= 1 \end{cases}$, d'où $\begin{cases} b &= 4 \\ \alpha &= \frac{1}{4} \end{cases}$. Or d'après la question précédente, l'inverse de $I + \frac{1}{4}J$ est $I + \frac{-\frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = I - \frac{1}{8}J$. Finalement,

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \left(I - \frac{1}{8} J \right) = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 7 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 7 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. Puisque I et J commutent, on pourra appliquer le binôme de Newton pour $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
 A^n &= 4^n \left(I + \frac{1}{4}J \right)^n \\
 &= 4^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{4^k} J^k I^{n-k} && \text{d'après la formule du binôme} \\
 &= 4^n \left(I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{4^k} J^k \right) && \text{on sépare la somme en vue d'appliquer la question 1} \\
 &= 4^n \left(I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{4^k} 4^{k-1} J \right) && \text{d'après la question 1} \\
 &= 4^n \left(I + \frac{1}{4}J \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \right) && \text{on a factorisé dans la somme par } \frac{1}{4}J \\
 &= 4^n \left(I + \frac{1}{4}J \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} - 1 \right) \right) && \text{on modifie la somme en vue d'utiliser la formule du binôme} \\
 &= 4^n \left(I + \frac{1}{4}J(2^n - 1) \right).
 \end{aligned}$$