
Variables aléatoires

.....

Exercice 408. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire

$$Y = \frac{1}{X+1}.$$

Corrigé 408. D'après la formule du transfert :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

avec, pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{k+1} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} p^{\ell-1} (1-p)^{n+1-\ell} \\ &= \frac{1}{p(n+1)} \left(\sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{n+1-\ell} - (1-p)^{n+1} \right) \\ &= \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)} \end{aligned}$$