

---

# Entiers, ensembles finis, dénombrement

---

- .....
- Exercice 164.** 1. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , le reste de la division euclidienne de  $10^n$  par 9 est égal à 1. En déduire le critère de divisibilité par 9 : un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
2. Démontrer le critère de divisibilité par 11 : un entier est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres est divisible par 11 (la somme alternée de 123 456 est  $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$ ).

**Corrigé 164.** Soit  $n$  un entier naturel dont l'écriture décimale est  $n = \overline{a_p \dots a_1 a_0}$ , ce qui signifie que

$$n = a_p 10^p + \dots + a_1 10^1 + a_0 10^0,$$

avec  $a_i \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$  pour tout  $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$ .

1. On a  $10 \equiv 1 [9]$ , d'où  $10^n \equiv 1 [9]$  donc le reste de la division euclidienne de  $10^n$  par 9 est 1 (on peut aussi montrer facilement ce résultat par récurrence). Ainsi, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $\alpha_k \in \mathbb{N}$  tel que  $10^k = 9\alpha_k + 1$ . On en déduit :

$$n = \sum_{k=0}^p a_k (9\alpha_k + 1) = 9 \underbrace{\sum_{k=0}^p a_k \alpha_k}_{\text{multiple de 9}} + \sum_{k=0}^p a_k,$$

donc  $n$  est divisible par 9 si et seulement si  $\sum_{k=0}^p a_k$  l'est aussi.

*Autre méthode.* Le binôme de Newton assure que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $10^k = (9 + 1)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} 9^j$ . Ainsi

$$n = \sum_{k=0}^p a_k \left( \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} 9^j \right) = \sum_{k=0}^p a_k \left( 1 + 9 \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} 9^{j-1} \right) = \sum_{k=0}^p a_k + 9 \sum_{k=0}^p a_k \left( \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} 9^{j-1} \right).$$

L'entier  $n$  est donc multiple de 9 si et seulement si  $\sum_{k=0}^p a_k$  est multiple de 9.

*Remarque :* le même calcul permet d'obtenir un critère de divisibilité par 3.

2. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , posons  $H_k$  : « le reste de la division euclidienne de 10 par 11 est  $(-1)^k$  ». On a  $10^0 \equiv 1 [11]$ , donc  $H_0$  est vraie. Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel  $H_k$  soit vraie. On a  $10^{k+1} \equiv 10 \times (-1)^k [11]$ . Or  $10 \equiv -1 [11]$ , d'où  $10^{k+1} \equiv (-1) \times (-1)^k [11]$ , et  $H_{k+1}$  est vraie. Finalement, le principe de récurrence assure que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $10^k \equiv (-1)^k [11]$ . Il s'ensuit que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $\alpha_k \in \mathbb{N}$  tel que  $10^k = 11\alpha_k + (-1)^k$ . Donc

$$n = \sum_{k=0}^p a_k (11\alpha_k + (-1)^k) = 11 \underbrace{\sum_{k=0}^p a_k \alpha_k}_{\text{multiple de 11}} + \sum_{k=0}^p (-1)^k a_k.$$

L'entier  $n$  est donc multiple de 11 si et seulement si  $\sum_{k=0}^p (-1)^k a_k$  est multiple de 11.

*Autre méthode.* Le binôme de Newton assure que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $10^k = (11 - 1)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} 11^j$ . Ainsi,

$$n = \sum_{k=0}^p a_k \left( \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} 11^j \right) = \sum_{k=0}^p (-1)^k a_k + 11 \sum_{k=0}^p a_k \left( \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} 11^{j-1} \right)$$

L'entier  $n$  est donc multiple de 11 si et seulement si  $\sum_{k=0}^p (-1)^k a_k$  est multiple de 11.

- .....
- Exercice 165 (Nombres de Mersenne).** 1. Soit  $p$  et  $q$  deux entiers naturels. Montrer que  $(2^p - 1) \mid (2^{pq} - 1)$ .
2. En déduire que pour tout entier naturel, si  $2^n - 1$  est premier, alors  $n$  est premier.
3. La réciproque est-elle vraie ? (on pourra tester les entiers premiers inférieurs à 13).

**Corrigé 165.** 1. On a  $2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1^q = (2^p - 1) \sum_{k=0}^{q-1} (2^p)^k \cdot 1^{q-1-k}$ , donc  $2^p - 1$  divise  $2^{pq} - 1$ .

*Autre méthode.*  $2^p \equiv 1 \pmod{2^p - 1}$ , puis  $2^{pq} \equiv 1^{pq} \pmod{2^p - 1}$ , d'où le résultat.

2. Raisonnons par contraposition. Supposons que  $n$  n'est pas premier. Alors il existe deux entiers naturels  $p$  et  $q$ , différents de 1 et de  $n$ , tels que  $n = pq$ . Le résultat précédent assure que  $2^p - 1$  divise  $2^n - 1$ . Comme  $2^p - 1 \notin \{1, 2^n - 1\}$  (car  $p \notin \{1, n\}$ ), on en déduit que  $2^n - 1$  n'est pas premier. On vient de montrer que si  $2^n - 1$  est premier, alors  $n$  est premier.
3. La réciproque est fautive :  $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ .

*Remarque :* on ne sait toujours pas si la liste des nombres de Mersenne premiers est finie. Actuellement, seuls 51 nombres de Mersenne premiers ont été découverts, et le dernier l'a été en 2016 à l'aide d'un supercalculateur. Ce nombre ( $2^{82\,589\,933} - 1$ ) contient 24 862 048 chiffres en base 10, et il est le plus grand nombre premier aujourd'hui connu !

.....

**Exercice 166.** Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Montrer que les fractions  $\frac{12n+1}{30n+2}$  et  $\frac{21n+4}{14n+3}$  sont irréductibles.

**Corrigé 166.** On dit qu'une fraction  $\frac{a}{b}$  (où  $(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ ) est irréductible si  $\text{PGCD}(a, b) = 1$ .

1. • *Méthode 1.* Déterminons le PGCD de  $12n + 1$  et  $30n + 2$  à l'aide de l'algorithme d'Euclide. On a :

$$\begin{aligned} 30n + 2 &= (12n + 1) \times 2 + 6n \\ \text{puis } 12n + 1 &= 6n \times 2 + \boxed{1} \\ \text{puis } 6n &= 1 \times 6n + 0 \end{aligned}$$

donc  $\text{PGCD}(12n + 1, 30n + 2) = 1$ , et la fraction proposée est irréductible.

- *Méthode 2.* Raisonnons par l'absurde, et notons  $p \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$  un diviseur commun de  $12n + 1$  et  $30n + 2$ . On a

$$12n + 1 \equiv 0[p] \quad \text{donc} \quad 60n + 5 \equiv 0[p].$$

(on a multiplié par 5 l'équation : vérifier que c'est licite). De plus,

$$30n + 2 \equiv 0[p] \quad \text{donc} \quad 60n + 4 \equiv 0[p].$$

En soustrayant la deuxième équation à la première, on obtient  $1 \equiv 0[p]$ , ce qui est absurde. Ainsi la fraction est irréductible.

2. De même,

$$\begin{aligned} 21n + 14 &= (14n + 3) \times 1 + (7n + 1) \\ \text{puis } 14n + 3 &= (7n + 1) \times 2 + \boxed{1} \\ \text{puis } 7n + 1 &= 1 \times (7n + 1) + 0 \end{aligned}$$

donc  $\text{PGCD}(21n + 14, 13n + 3) = 1$ , et la fraction proposée est irréductible.

.....

**Exercice 167.** On divise 2003 par  $n$ , le reste est égal à 8. On divise 3002 par  $n$ , le reste obtenu est 27. Que vaut  $n$  ?

**Corrigé 167.** Il existe  $(a, b) \in \mathbf{N}^2$  tels que

$$\begin{cases} 2003 &= an + 9 \\ 3002 &= bn + 27 \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} 1995 &= an \\ 2975 &= bn \end{cases}.$$

Ainsi  $n$  divise 1995 et 2975, donc  $n$  divise également  $\text{PGCD}(1995, 2975)$ . Or

$$\begin{aligned} 2975 &= 1995 \times 1 + 980 \\ \text{puis } 1995 &= 980 \times 2 + \boxed{35} \\ \text{puis } 980 &= 28 \times 35 + 0 \end{aligned}$$

Donc  $\text{PGCD}(1995, 2975) = 35$ . Ainsi  $n$  divise 35, d'où  $n \in \{1, 5, 7, 35\}$ . On peut les tester tous, ou raisonner en encore un peu : le reste d'une division euclidienne doit être inférieur au diviseur, on en déduit  $n \geq 28$ . Finalement,  $n = 35$ .

- Exercice 168.** 1. Déterminer les entiers naturels vérifiant  $\begin{cases} \text{PGCD}(x, y) = 3 \\ x + y = 21 \end{cases}$ .
2. Déterminer les entiers naturels vérifiant  $\begin{cases} \text{PGCD}(x, y) = 6 \\ \text{PPCM}(x, y) = 72 \end{cases}$ .

**Corrigé 168.** 1. *Analyse.* Soit  $(x, y) \in \mathbf{N}^2$  vérifiant le système. En posant  $x' = \frac{x}{3}$  et  $y' = \frac{y}{3}$ , on a :

$$\begin{cases} \text{PGCD}(x', y') = 1 \\ x' + y' = 7 \end{cases}$$

Puisque  $x' + y' = 7$ , on a  $(x', y') \in \{(0, 7), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (7, 0)\}$ ,

$$(x, y) \in \{(0, 21), (3, 18), (6, 15), (9, 12), (12, 9), (15, 6), (18, 3), (21, 0)\}.$$

*Synthèse.*

- On a  $\text{PGCD}(0, 21) = 21$  donc  $(0, 21)$  n'est pas solution.
- On a  $\text{PGCD}(3, 18) = 3$ , donc  $(3, 18)$  est solution.
- On a  $\text{PGCD}(6, 15) = 3$ , donc  $(6, 15)$  est solution.
- On a  $\text{PGCD}(9, 12) = 3$ , donc  $(9, 12)$  est solution.
- Les autres cas s'obtiennent à partir de ceux déjà traités, par symétrie du problème.

Finalement, l'ensemble des solutions est  $\{(3, 18), (6, 15), (9, 12), (12, 9), (15, 6), (18, 3)\}$ .

2. Soit  $(x, y) \in \mathbf{N}^2$ .

$$\begin{cases} \text{PGCD}(x, y) = 6 \\ \text{PPCM}(x, y) = 72 \end{cases} \iff \exists (x', y') \in \mathbf{Z}^2, \begin{cases} x = 6x' \\ y = 6y' \\ \text{PGCD}(x', y') = 1 \\ \text{PPCM}(x', y') = 12 \end{cases}.$$

Intéressons-nous au problème

$$(S) \quad \begin{cases} \text{PGCD}(x', y') = 1 \\ \text{PPCM}(x', y') = 12 \end{cases},$$

d'inconnue  $(x', y') \in \mathbf{N}^2$ .

*Analyse.* Soit  $(x', y') \in \mathbf{N}^2$  vérifiant le système  $(S)$ . On a :

$$\begin{cases} \text{PGCD}(x', y') = 1 \\ x'y' = 12 \end{cases}$$

Puisque  $x'y' = 12$ , on en déduit  $(x', y') \in \{(1, 12), (2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2), (12, 1)\}$ .

*Synthèse.*

- $\text{PGCD}(1, 12) = 1$ , donc  $(1, 12)$  est une solution.
- $\text{PGCD}(2, 6) = 2$ , donc  $(2, 6)$  n'est pas une solution.
- $\text{PGCD}(3, 4) = 1$ , donc  $(3, 4)$  est une solution.
- Les autres cas s'obtiennent à partir de ceux déjà traités, par symétrie du problème.

Finalement, les solutions de  $(S)$  sont  $(1, 12)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(4, 3)$  et  $(12, 1)$ . On en déduit que l'ensemble des solutions du problème initial est :

$$\{(6, 72), (12, 36), (18, 24), (24, 18), (36, 12), (72, 6)\}.$$

**Exercice 169 (Petit théorème de Fermat).** Soit  $p$  un nombre premier.

1. Montrer que pour tout  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ ,  $p$  divise  $\binom{p}{k}$ .
2. En déduire que pour tout entier  $a$ ,  $a^p - a$  est un multiple de  $p$ . On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.

**Corrigé 169.** 1. Soit  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ . On a  $p! = k!(p-k)!\binom{p}{k}$ . Ainsi  $p$  divise  $k!(p-k)!\binom{p}{k}$ . Comme  $1 \leq k \leq p-1$ ,  $p$  ne divise pas  $k!$  (sinon  $p$  divise l'un des facteurs de  $k!$  mais ils sont tous strictement inférieurs à  $p$ ). De même,  $p$  ne divise pas  $(p-k)!$ , donc  $p$  divise  $\binom{p}{k}$  (ce résultat, intuitif, est plus connu sous le nom de lemme d'Euclide et n'est pas très difficile à obtenir).

*Autre méthode (qui utilise le théorème de Gauss, hors-programme).* Soit  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ .

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1) \cdots (p-(k+1))}{k!}$$

Comme  $\binom{p}{k}$  est entier, alors  $k!$  divise  $p(p-1) \cdots (p-(k+1))$ . De plus,  $k!$  et  $p$  sont premiers entre eux (on utilise  $0 < k < p$ ), donc d'après le théorème de Gauss,  $k!$  divise  $(p-1) \cdots (p-(k+1))$ . Autrement dit, il existe  $m \in \mathbf{Z}$  tel que  $mk! = (p-1) \cdots (p-(k+1))$ , puis  $\binom{p}{k} = mp$ .

2. Pour tout  $a \in \mathbf{N}^*$  (le cas  $a = 0$  est trivial), on pose  $H_a : \ll a^p \equiv a \pmod{p} \gg$ .  
 $H_1$  est vraie. Soit  $a \geq 1$  tel que  $H_a$  soit vraie. Alors

$$(a+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k$$

d'où, avec la question précédente,

$$(a+1)^p \equiv \binom{p}{0} a^0 + \binom{p}{p} a^p \pmod{p}, \quad \text{i.e.} \quad (a+1)^p \equiv 1 + a^p \pmod{p}$$

d'où, avec  $H_a$ ,

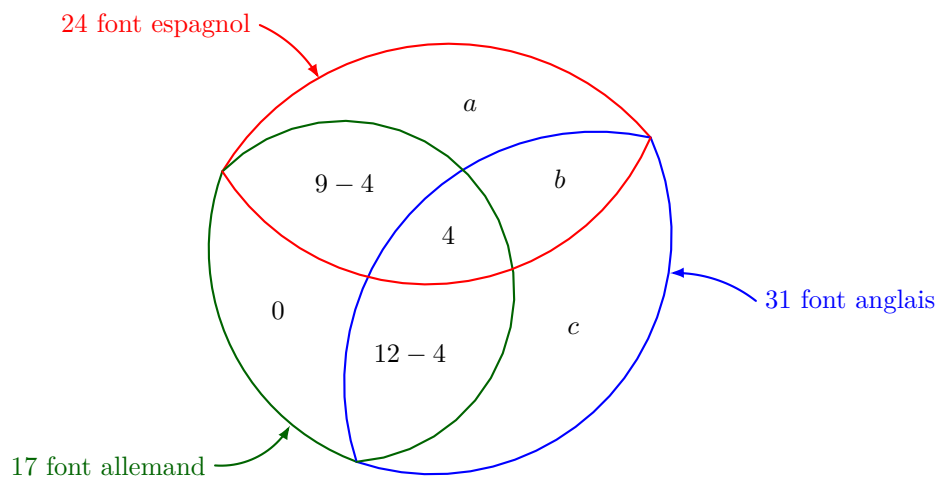
$$(a+1)^p \equiv 1 + a \pmod{p}$$

Ainsi  $H_{a+1}$  est vraie et le principe de récurrence permet de conclure.

**Exercice 170.** Dans une classe de 38 élèves étudiant chacun au moins une langue, 31 étudient l'anglais, 24 l'espagnol, 17 l'allemand et 12 étudient à la fois anglais et allemand, 9 étudient espagnol et allemand, et 4 élèves étudient les trois langues simultanément. Calculer le nombre d'élèves :

1. étudiant l'anglais et l'espagnol ;
2. étudiant l'anglais ou l'espagnol ;
3. étudiant uniquement l'allemand.

**Corrigé 170.** On a :



Notons

- $E$  l'ensemble des élèves étudiant l'espagnol ;
- $F$  l'ensemble des élèves étudiant l'allemand ;
- $G$  l'ensemble des élèves étudiant l'anglais.

D'après l'énoncé,  $\begin{cases} \text{Card}(E \cap G \cap A) = 4 \\ \text{Card}(G \cap A) = 12 \end{cases}$ , donc 8 élèves étudient seulement anglais et allemand.

De même, 5 élèves étudient seulement espagnol et allemand.

Il y a 17 élèves étudiant l'allemand et  $5 + 8 + 4 = 17$ , donc aucun élève n'étudie que l'allemand.

On a ensuite (avec les notations du dessin),

$$\begin{cases} 9 + a + b = 24 \\ 12 + b + c = 31 \\ 17 + a + b + c = 38 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a + b = 15 \\ b + c = 19 \\ a + b + c = 21 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a = 2 \\ b = 13 \\ c = 6 \end{cases}.$$

Ainsi :

1. Il y a  $b + 4 = 17$  élèves étudiant l'anglais et l'espagnol.
2. Il y a  $9 + 8 + 21 = 38$  élèves étudiant l'anglais ou l'espagnol.
3. Il y a 0 élève étudiant uniquement l'allemand.