

Calcul matriciel, limites et continuité

Exercice 268. 1. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbf{K}^4$. Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $A^2 - (a + d)A$.

(b) A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les scalaires a, b, c, d la matrice A est-elle inversible ? Lorsque A est inversible, exprimer A^{-1} à l'aide de a, b, c, d .

2. Supposons $ad - bc \neq 0$. Soit $(e, f) \in \mathbf{K}^2$. Résoudre le système $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Corrigé 268. 1. (a) $A^2 = \begin{pmatrix} bc + a^2 & bd + ab \\ cd + ac & bc + d^2 \end{pmatrix}$, donc $A^2 - (a + d)A = \begin{pmatrix} -ad + bc & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} = (bc - ad)I_3$.

(b) On a $A(A - (a + d)I) = (bc - ad)I_3$. Si $bc - ad = 0$, alors $A(A - (a + d)I) = 0$. Supposons par l'absurde que A est inversible. On obtient alors $A = (a + d)I$, ce qui est faux. Ainsi A n'est pas inversible.

Réciproquement, supposons $bc - ad \neq 0$. Alors $\frac{1}{bc - ad}A(A - (a + d)I) = I_3$, et ainsi A est inversible

d'inverse $\frac{1}{bc - ad}(A - (a + d)I_3) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

2. Sous forme matricielle, le système s'écrit $AX = B$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$. On obtient alors $X = A^{-1}B$, puis

$$X = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} de - bf \\ -ce + af \end{pmatrix}.$$

Exercice 279. Déterminer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes au point indiqué :

(a) $x \mapsto x - 2\sqrt{x}$ en $+\infty$;

(i) $x \mapsto \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$;

(b) $x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ en $+\infty$;

(j) $x \mapsto \cos(x + \frac{1}{x})$ en $+\infty$;

(c) $x \mapsto x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ en 0 ;

(k) $x \mapsto \frac{e^{3x+1}}{\ln(x)^4}$ en $+\infty$;

(d) $x \mapsto \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$ en $+\infty$;

(e) $x \mapsto \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$;

(l) $x \mapsto \frac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$ en 0^+ ;

(f) $x \mapsto \frac{x^3 \ln(x) + e^x}{\ln(x)^2 + x^2}$ en $+\infty$;

(g) $x \mapsto \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$ en 0 ;

(m) $x \mapsto \sin(x) \sin(\frac{1}{x})$ en 0 ;

(h) $x \mapsto \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{4x^2 + 3x + 1} \sin(\frac{1}{x})$ en $+\infty$;

(n) $x \mapsto x \ln(\frac{x+1}{x-1})$ en $+\infty$.

Corrigé 279. (a) $x - 2\sqrt{x} = x(1 - 2x^{-1/2})$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(b) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(c) On a $\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$, donc si $x \geq 0$, $1 - x < f(x) \leq 1$ et si $x \leq 0$, $1 \leq f(x) < 1 - x$. Dans tous les cas, le théorème des gendarmes permet de conclure, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

(d) On a $\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = \sqrt{x} \frac{x+1-x+1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}})} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

(e) On a $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right)$. Or $\frac{1}{x} \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \frac{1}{x}(\ln(\ln x) - \ln x) = \frac{\ln x}{x} \left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x} - 1\right)$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ puis $\frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

- (f) On a $\frac{x^3 \ln x + e^x}{\ln(x)^2 + x^2} = \frac{e^x(\frac{x^3 \ln x}{e^x} + 1)}{x^2(\frac{\ln x}{x} + 1)}$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- (g) On a $\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \frac{3 \sin(3x)}{2 \cdot 3x} \frac{2x}{\sin(2x)}$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{2}$.
Remarque : immédiat avec des équivalents.
- (h) On a $\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{4x^2 + 3x + 1} \sin(\frac{1}{x}) = x \times \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} \times \frac{1}{x} \times \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{4}$. *Remarque* : immédiat avec des équivalents.
- (i) On a $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{\frac{x}{x+1}} \left(\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x}}{x}} + 1 \right)$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.
- (j) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x} = +\infty$ et $\cos$ n'admet pas de limite en $+\infty$, donc c'est aussi le cas de f .
- (k) On a $\frac{e^{3x+1}}{\ln(x)^4} = e \left(\frac{e^{\frac{3x}{4}}}{\ln x} \right)^4$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- (l) On a $\frac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)} = \frac{2\sqrt{x}}{x} \times \frac{x}{\ln(1+x)}$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.
- (m) On a $\sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin x}{x} \times x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (cf. théorème des gendarmes).
 Finalement, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.
- (n) On a $x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = \frac{2x}{x-1} \frac{\ln(1 + \frac{2}{x-1})}{\frac{2}{x-1}}$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

Exercice 280. Trouver un équivalent simple des fonctions suivantes, au point indiqué :

- (a) $x \mapsto \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{3x^2 - 5x + 6}$ en $+\infty$, puis en 0 ; (d) $x \mapsto \ln(1 + x^2 + 5x^4)$ en 0 puis en $+\infty$;
 (b) $x \mapsto \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}$ en $\frac{\pi}{4}$; (e) $x \mapsto \lfloor x^2 \rfloor$ en $+\infty$;
 (c) $x \mapsto \frac{x^5 + 2x^3}{3x^2 + 4x}$ en 0 ;

Corrigé 280. (a) $\frac{x^3 + 3x^2 - 2}{3x^2 - 5x + 6} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{3}$ et $\frac{x^3 + 3x^2 - 2}{3x^2 - 5x + 6} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-1}{3}$.

(b) Avec le changement de variable $y = x - \frac{\pi}{4}$, on obtient

$$\frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x} = \frac{\sin(y + \frac{\pi}{4}) - \cos(y + \frac{\pi}{4})}{-4y} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(y) + \cos(y) - \cos(y) + \sin(y)}{-4y} = \frac{\sqrt{2} \sin(y)}{-4y} \underset{y \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{-4}$$

$$\text{d'où } f(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}{\sim} -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$(c) \frac{x^5 + 2x^3}{3x^2 + 4x} = x^2 \frac{x^2 + 2}{3x + 4} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

$$(d) \ln(1 + x^2 + 5x^4) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 + 5x^4 = x^2(1 + 5x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2;$$

$$\ln(1 + x^2 + 5x^4) = \ln\left(x^4 \left(5 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)\right) = 4 \ln(x) + \ln\left(5 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) = 4 \ln(x) \left(1 + \frac{\ln(5 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4})}{4 \ln x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 4 \ln x.$$

$$(e) 1 - \frac{1}{x^2} \leq \frac{\lfloor x^2 \rfloor}{x^2} \leq 1, \text{ d'où } \lfloor x^2 \rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2.$$