

---

# Variables aléatoires

---

.....

**Exercice 409.** Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ .

On pourra utiliser les formules suivantes :

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ et } \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Une urne contient  $n-2$  boules rouges numérotées de 1 à  $n-2$  et deux boules blanches numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une et sans remise de toutes les boules de l'urne.

On note  $X$  la variables aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche, et  $Y$  celle correspondant au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $B_i$  l'événement "la  $i$ -ème boule tirée est blanche".

1. Déterminer  $\mathbb{P}(X=1)$ ,  $\mathbb{P}(X=2)$ ,  $\mathbb{P}(X=3)$ .
2. Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Exprimer l'événement  $(X=k)$  à l'aide des événements  $B_1, \dots, B_n$ , puis montrer que

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

3. Démontrer que  $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{3}$ . Calculer  $\mathbb{V}(X)$ .
4. Déterminer  $\mathbb{E}(Z)$  et  $\mathbb{V}(Z)$  où  $Z$  est le nombre de boules rouges restant dans l'urne lorsque la première boule blanche vient d'être tirée.
5. Déterminer la loi de  $Y$ .

**Corrigé 409.** 1. L'événement  $(X=1)$  est l'événement  $B_1$ . Ainsi,  $\mathbb{P}(X=1) = \frac{2}{n}$  car au premier tirage, l'urne contient  $n$  boules dont 2 blanches.

L'événement  $(X=2)$  est  $\overline{B_1} \cap B_2$ . Ainsi, d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{n-2}{n} \times \frac{2}{n-1}$$

car au premier tirage l'urne contient  $n$  boules dont 2 blanches, et au deuxième tirage,  $n-1$  boules dont 2 blanches.

De même, on obtient

$$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(\overline{B_2})\mathbb{P}_{\overline{B_1} \cap \overline{B_2}}(B_3) = \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{2}{n-2}$$

2.  $(X=k) = \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k$ , donc, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) \times \dots \times \mathbb{P}_{\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}}}(B_k) \\ &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \dots \times \frac{n-2-(k-2)}{n-(k-2)} \times \frac{2}{n-(k-1)} \\ &= \frac{2 \times (n-2)(n-3) \dots (n-k+1)(n-k)}{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

3. La première boule blanche peut apparaître au plus tard au  $n-1$ -ième tirage. Ainsi,  $X(\Omega) = \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ , et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n-1} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k(n-k)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} k - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{2}{n-1} \times \frac{(n-1)n}{2} - \frac{2}{n(n-1)} \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n+1}{3} \end{aligned}$$

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$  avec, d'après la formule du transfert :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k^2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \frac{n(2n-1)}{3} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6}$$

Finalement :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{n(n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{3}\right)^2 = \frac{(n+1)(n-2)}{18}$$

4. Lorsque la première boule blanche vient d'être tirée, on a tiré  $X-1$  boules rouges, il en reste donc  $n-2-(X-1)$ . Ainsi,  $Z = n-1-X$ , et par conséquent :

$$\mathbb{E}(Z) = n-1-\mathbb{E}(X) = \frac{2(n-2)}{3} \text{ et } \mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}(X) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}$$

5. Introduisons, pour  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , l'événement  $N_i$  "la  $i$ -ème boule tirée porte le numéro 1". Puisque l'urne contient  $n$  boules dont 2 boules portant le numéro 1, en raisonnant comme précédemment, on obtient que  $Y$  suit la même loi que  $X$ .

**Exercice 410.** Soit  $n$  un entier naturel non nul. Une urne contient  $n$  jetons numérotés de 1 à  $n$ . On tire au hasard une poignée de jetons de cette urne. Notons  $X$  la somme des points obtenus, et  $Y$  le nombre de jetons de la poignée tirée. On suppose que  $Y$  est une variable aléatoire uniforme sur  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , et on convient que si  $Y$  prend la valeur 0, alors  $X$  prend la valeur 0.

- Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on définit la variable aléatoire  $X_k$  en posant :  $X_k = k$  si le jeton  $k$  est dans la poignée tirée,  $X_k = 0$  sinon. Montrer que  $X = \sum_{k=1}^n X_k$ .
- En utilisant le système complet  $(\{Y = p\})_{p \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , montrer que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la variable aléatoire  $\frac{X_k}{k}$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ .
- En déduire l'espérance de  $X$ .

**Corrigé 410.** 1. La variable aléatoire  $\sum_{k=1}^n X_k$  donne la somme des numéros des jetons présents dans la poignée, c'est bien la même chose que  $X$ .

2. Puisque la variable aléatoire  $X_k$  ne prend que deux valeurs 0 ou  $k$ , alors la variable aléatoire  $\frac{X_k}{k}$  ne prend que les valeurs 0 ou 1 : elle suit donc une loi de Bernoulli, de paramètre  $p = \mathbb{P}(X_k = k)$ .  
Le système  $(\{Y = p\})_{p \in \llbracket 0; n \rrbracket}$  étant un système complet d'événements :

$$\begin{aligned} p &= \sum_{p=0}^n \mathbb{P}((Y = p) \cap (X_k = k)) \\ &= \sum_{p=0}^n \mathbb{P}(Y = p) \mathbb{P}_{\{Y=p\}}(X_k = k) \\ &= \sum_{p=0}^n \frac{1}{n+1} \times \frac{\binom{n-1}{p-1}}{\binom{n}{p}} \\ &= \sum_{p=0}^n \frac{p}{n(n+1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La variable aléatoire  $\frac{X_k}{k}$  suit donc une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ .

3. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{E}\left(\frac{X_k}{k}\right) = \sum_{k=1}^n k \times \frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$$

**Exercice 411.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli. Déterminer la probabilité de l'événement  $\{X = Y\}$ .

**Corrigé 411.** L'événement  $\{X = Y\}$  est la réunion (disjointe) des événements  $\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}$  et  $\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}$ . Ainsi

$$\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1)) + \mathbb{P}((X = 0) \cap (Y = 0)) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)$$

car les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, donc les événements  $(X = 1)$  et  $(Y = 1)$  sont indépendants, ainsi que les événements  $(X = 0)$  et  $(Y = 0)$ . Notons  $p = \mathbb{P}(X = 1)$  et  $q = \mathbb{P}(Y = 1)$ . Alors :

$$\mathbb{P}(X = Y) = pq + (1 - p)(1 - q)$$