
Entiers, ensembles finis, dénombrement

.....

Exercice 171. Dénombrer les nombres de 4 chiffres écrits uniquement avec les chiffres 1, 2 et 3.

Corrigé 171. La réponse est :

$$\underbrace{3}_{\text{choix du 1er chiffre}} \times \underbrace{3}_{\text{choix du 2e chiffre}} \times \underbrace{3}_{\text{choix du 3e chiffre}} \times \underbrace{3}_{\text{choix du 4e chiffre}} = 3^4 (= 81)$$

.....

Exercice 172. Une urne contient dix boules numérotées de 0 à 9. On tire quatre boules de l'urne. Dénombrer le nombre de tirages possibles dans les trois cas suivants :

1. les tirages sont successifs et sans remise ;
2. les tirages sont successifs et avec remise ;
3. les tirages sont simultanés.

Corrigé 172.

1. Les tirages sont successifs et sans remise : on représente un tirage par le quadruplet des numéros obtenus. Un tirage correspond donc à une 4-liste d'éléments distincts de $\llbracket 0, 9 \rrbracket$: il y en a $10 \times 9 \times 8 \times 7$.
2. Les tirages sont successifs et avec remise : avec la même représentation que précédemment, un tirage correspond à une 4-liste d'éléments de $\llbracket 0, 9 \rrbracket$: il y en a donc 10^4 différents.
Autre possibilité : il y a 10 choix possibles pour chacun des boules tirées.
3. Les tirages sont simultanés : on représente un tirage par l'ensemble des numéros tirés ; un tirage correspond donc ici à une partir à 4 éléments de $\llbracket 0, 9 \rrbracket$. Il y a donc $\binom{10}{4}$ tirages possibles.

.....

Exercice 173. Combien de mots de trois lettres (ayant un sens ou non) peut-on former en utilisant uniquement les lettres du mot PARIS, sans répétition ? Combien d'anagrammes (ayant un sens ou non) du mot PARIS existe-t-il ? Reprendre cette dernière question avec le mot BILLE, puis avec le mot ESCARPOLETTE.

Corrigé 173.

- Il y a $\binom{5}{3} = 10$ façons de choisir trois lettres parmi celles du mot PARIS. Ces trois lettres choisies, il y a $3! = 6$ mots différents possibles (on choisit la place de chacun des trois lettres : 3 choix pour la premier, 2 pour la deuxième, 1 pour la dernière). Il y a donc en tout 60 mots de trois lettres formés avec les lettres du mot PARIS.

Une anagramme est une permutation des lettres : il y a $5! = 120$ anagramme du mot PARIS.

Autre possibilité : on choisit la place du P : 5 choix. Puis la place du A : 4 choix. Ensuite, on positionne le R : 3 choix. Puis le I : 2 choix. Et enfin, il ne reste qu'une choix pour le S. En tout $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$ anagrammes.

- Le mot BILLE comporte deux lettres identiques : on choisit la place des deux L : $\binom{5}{2} = 10$ choix possibles, puis la place du B : 3 choix, et celle du I : 2 choix, celle du E : 1 choix. Au total, 60 anagrammes du mot BILLE.
 - Le mot ESCARPOLETTE comporte 3 E, 2 T et 7 lettres distinctes. On choisit la place des trois E : $\binom{12}{3} = 220$ choix, puis celle des deux T : $\binom{9}{2} = 36$ possibilités, puis la place de chacun des 7 lettres restantes : $7!$ choix. Au total, il y a $\frac{12!}{3!2!}$ anagrammes du mot ESCARPOLETTE.
-

Exercice 174. On rappelle qu'un jeu de 32 cartes est constitué de quatre familles : pique, cœur, carreau et trèfle, chacune constituée de huit cartes : As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7. On tire successivement et sans remise huit cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

- Combien de tirages contiennent au moins un as ?
- Combien de tirages comprennent au moins un pique ou une dame ?

Corrigé 174. 1. Le nombre de tirages possibles est :

$$\underbrace{32}_{\text{choix de la 1ère carte}} \times \underbrace{31}_{\text{choix de la 2e carte}} \times \cdots \times \underbrace{25}_{\text{choix de la 8e carte}} = \frac{32!}{24!} \quad (= 424\,097\,856\,000).$$

- Dénombrons l'ensemble des tirages ne contenant pas d'as :

$$\underbrace{28}_{\text{choix de la 1ère carte non as}} \times \underbrace{27}_{\text{choix de la 2e carte non as}} \times \cdots \times \underbrace{21}_{\text{choix de la 8e carte non as}} = \frac{28!}{20!}.$$

Il y a donc $\frac{32!}{24!} - \frac{28!}{20!}$ tirages contenant au moins un as (avec une machine à calculer, on trouve que ce nombre vaut 298 779 062 400).

- Dénombrons l'ensemble des tirages ne comprenant ni pique, ni dame. Il y a $32 - 8 - 3 = 21$ cartes ni pique ni dame (8 pique dans le jeu, 3 dames non pique), donc il y a $\frac{21!}{13!}$ tirages ne contenant ni pique ni dame et donc $\frac{32!}{24!} - \frac{21!}{13!}$ tirages contenant au moins un pique ou une dame (pour indication, ça n'est pas demandé, ce nombre vaut : 415 893 139 200).

.....
Exercice 175. Dans un jeu de 32 cartes, on choisit (simultanément) cinq cartes au hasard.

- Quel est le nombre total de mains que l'on peut obtenir ? (une main désigne les cartes détenues par le joueur)
- Combien de ces mains contiennent exactement 4 as ?
- Combien de ces mains contiennent exactement 3 as et 2 rois ?
- Combien de ces mains contiennent au moins 3 rois ?
- Combien de ces mains contiennent au moins un as ?
- Combien de ces mains contiennent exactement 2 as et 2 carreaux ?

Corrigé 175. *Remarque importante :* Une main est l'ensemble des cartes tirées. Il n'y a pas d'ordre dans une main.

- Une main est une partie à cinq éléments de l'ensemble des 32 cartes du jeu. Il y a donc $\binom{32}{5} (= 201\,376)$ mains possibles.
- Nombre de mains contenant exactement 4 as :

- choix des 4 as : $\binom{4}{4}$ possibilité ;
- choix de la carte restante parmi les $28 = 32 - 4$ restantes : $\binom{28}{1}$ possibilités.

Il y a donc $\binom{4}{4} \times \binom{28}{1} = 28$ possibilités.

- Nombre de mains contenant exactement 3 as et 2 rois :

- choix des 3 as (parmi 4) : $\binom{4}{3}$ possibilités ;
- choix des 2 rois (parmi 4) : $\binom{4}{2}$ possibilités.

Il y a donc $\binom{4}{3} \times \binom{4}{2} = 24$ possibilités.

- Nombre de mains contenant au moins trois rois : on dénombre les deux situations disjointes « mains contenant exactement 3 rois » et « mains contenant exactement 4 rois ».

(a) Mains contenant exactement 3 rois.

- Choix des 3 rois : $\binom{4}{3}$ possibilités.
- Choix de 2 cartes qui ne sont pas des rois : $\binom{28}{2}$ possibilités.

Ainsi, il y a $\binom{4}{3} \times \binom{28}{2}$ possibilités.

(b) Mains contenant exactement 4 rois.

- Choix des 4 rois : $\binom{4}{4}$ possibilités.

- Choix d'une carte qui n'est pas un roi : $\binom{28}{1}$ possibilités.

Donc il y a $\binom{4}{4} \times \binom{28}{1}$ choix.

Finalement, il y a $\binom{4}{3} \times \binom{28}{2} + \binom{4}{4} \times \binom{28}{1} (= 1\,540)$ mains contenant au moins trois rois. *Remarque* : Pourquoi la réponse

$$\underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{choix de 3 rois}} \times \underbrace{\binom{29}{2}}_{\text{choix des 2 autres cartes}}$$

est-elle fausse ?

Avec cette description, on obtient bien toutes les mains contenant au moins 3 as, mais certaines de ces mains sont décrites plusieurs fois. Par exemple, la main : {4 rois et la dame de cœur} est décrite par

- ◦ choix de trois rois : roi de carreau, roi de pique, roi de trèfle ;
- choix des deux autres cartes : roi de cœur, dame de cœur.
- et par :
 - choix de trois rois : roi de cœur, roi de carreau, roi de pique ;
 - choix des deux autres cartes : roi de trèfle, dame de cœur.

5. Nombre de main contenant au moins un as. On passe au complémentaire :

$$\underbrace{\binom{32}{5}}_{\text{nombre total de mains}} - \underbrace{\binom{28}{5}}_{\text{nombre de mains sans as}} (= 103\,096).$$

6. Les mains contenant exactement 2 as et 2 carreaux sont de types disjoints : il y a celles contenant l'as de carreau, et celles ne contenant pas l'as de carreau. Il y en a donc :

$$\overbrace{\underbrace{\binom{1}{1}}_{\text{choix de l'as de carreau}} \times \underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{choix d'un as non carreau}} \times \underbrace{\binom{7}{1}}_{\text{choix d'un carreau non as}} \times \underbrace{\binom{21}{2}}_{\text{choix de deux cartes non as, non carreau}}}^{\text{nombre de tels tirages contenant l'as de carreau}} + \overbrace{\underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{choix des deux as non carreau}} \times \underbrace{\binom{7}{2}}_{\text{choix des deux carreaux non as}} \times \underbrace{\binom{21}{1}}_{\text{choix d'une carte non carreau, non as}}}^{\text{nombre de tels tirages ne contenant pas l'as de carreau}}$$

c'est-à-dire $3 \times 7 \times 21 \times 10 + 3 \times 7 \times 3 \times 21 = 21^2 \times 13 (= 5\,733)$.

Exercice 176. Douze livres deux à deux distincts sont placés côte à côte sur une étagère. Parmi ceux-ci, trois constituent les trois tomes d'un roman.

1. Quel est le nombre de dispositions de ces douze livres pour lesquelles les trois tomes du roman sont côte à côte, dans l'ordre (de gauche à droite : tome 1, 2 puis 3) ?
2. Quel est le nombre de dispositions de ces douze livres pour lesquelles les trois tomes du roman sont côte à côte, mais pas forcément dans l'ordre ?

Corrigé 176. 1. On remarque que le tome 1 ne peut pas être placé dans les deux dernières positions. Il y a donc 10 positions possibles pour le tome 1.

Pour décrire une disposition des 12 livres pour laquelle les trois tomes du roman sont côte à côte dans l'ordre, on peut raisonner par étapes :

- choix de la place du tome 1 : 10 possibilités ;
- choix de la place du tome 2 : 1 possibilité (à droite du tome 1) ;
- choix de la place du tome 3 : 1 possibilité ;
- choix de la place du 1er livre restant : 9 possibilités ;
- choix de la place du 2e livre restant : 8 possibilités ;
- etc.
- choix de la place du dernier livre : 1 possibilité.

Il y a donc en tout $10 \times 9 \times 8 \times \cdots \times 1 = 10!$ dispositions possibles.

Autre solution : on peut considérer les tomes 1, 2 et 3 comme un seul bloc 1-2-3. Dans ce cas, les étapes sont les suivantes :

- choix de la place du bloc 1-2-3 : 10 possibilités ;
- choix de la place du 1er livre restant : 9 possibilités ;
- choix de la place du 2e livre restant : 8 possibilités ;
- etc.
- choix de la place du dernier livre : 1 possibilité.

Il y a donc en tout $10 \times 9 \times 8 \times \cdots \times 1 = 10!$ dispositions possibles.

2. Pour une telle disposition, on peut :

- choisir une disposition précédente (les trois tomes sont rangés dans l'ordre) : $10!$ possibilités.
- mélanger les trois tomes, c'est-à-dire choisir le numéro du tome apparaissant en premier et le numéro du tome apparaissant en deuxième, le troisième correspondant nécessairement au tome non encore choisi : il y a $3 \times 2 \times 1 = 3!$ possibilités.

Finalement, il y a $10! \times 3!$ dispositions possibles.