

Calcul matriciel, limites et continuité

Exercice 280. Trouver un équivalent simple des fonctions suivantes, au point indiqué :

- (a) $x \mapsto \frac{x^3+3x^2-2}{3x^2-5x+6}$ en $+\infty$, puis en 0 ;
 (b) $x \mapsto \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}$ en $\frac{\pi}{4}$;
 (c) $x \mapsto \frac{x^5+2x^3}{3x^2+4x}$ en 0 ;
 (d) $x \mapsto \ln(1+x^2+5x^4)$ en 0 puis en $+\infty$;
 (e) $x \mapsto \lfloor x^2 \rfloor$ en $+\infty$;
 (f) $x \mapsto \ln(1+x^2) + \cos x$ en $+\infty$ puis en 0 ;
 (g) $x \mapsto \ln(x)$ en 1 ;
 (h) $x \mapsto \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{100}{x^3}$ en 0, en $+\infty$ puis en -1 ;
 (i) $x \mapsto \sin(3x^2) + \ln(1+2x)$ en 0 ;
 (j) $x \mapsto \sin(e^{-x})$ en $+\infty$;
 (k) $x \mapsto \ln(5x^2 + e^{2x})$ en $+\infty$ puis en 0 ;
 (l) $x \mapsto \frac{e^{x^2} + 3x^2}{x^5 + \ln x}$ en $+\infty$ puis en 0.

Corrigé 280. (a) $\frac{x^3+3x^2-2}{3x^2-5x+6} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{3}$ et $\frac{x^3+3x^2-2}{3x^2-5x+6} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-1}{3}$.

(b) Avec le changement de variable $y = x - \frac{\pi}{4}$, on obtient

$$\frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x} = \frac{\sin(y + \frac{\pi}{4}) - \cos(y + \frac{\pi}{4})}{-4y} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(y) + \cos(y) - \cos(y) + \sin(y)}{-4y} = \frac{\sqrt{2} \sin(y)}{-4y} \underset{y \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{-4}$$

d'où $f(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}{\sim} -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(c) $\frac{x^5+2x^3}{3x^2+4x} = x^2 \frac{x^2+2}{3x+4} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

(d) $\ln(1+x^2+5x^4) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2+5x^4 = x^2(1+5x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$;

$$\ln(1+x^2+5x^4) = \ln\left(x^4\left(5 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)\right) = 4\ln(x) + \ln\left(5 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) = 4\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{\ln(5 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4})}{4\ln x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 4\ln x.$$

(e) $1 - \frac{1}{x^2} \leq \frac{\lfloor x^2 \rfloor}{x^2} \leq 1$, d'où $\lfloor x^2 \rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$.

(f) $\ln(1+x^2) + \cos x = \ln\left(x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) + \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\lim} \ln(1+x^2) + \cos x = 1$, donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$.
 $= 2\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + \cos(x)$
 $= 2\ln(x) \left(1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{\ln(x)} + \frac{\cos x}{\ln x}\right)$
 $\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2\ln x$

(g) $\ln(x) = \ln(x-1+1) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x-1$.

(h) • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{100}{x^3} = \pm\infty$, $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{100}{x^3}\right)$ puis $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{100}{x^3} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{100}{x^3}$.
 • $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{100}{x^3} = \frac{x+2-x-1}{x^2+3x+2} + \frac{100}{x^3} = \frac{1}{x^2}$.
 • $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{100}{x^3} - \frac{1}{x+2} = -101$ et $\lim_{x \rightarrow -1^\pm} \frac{1}{x+1} = \pm\infty$, $\frac{100}{x^3} - \frac{1}{x+2} \underset{x \rightarrow -1}{=} o\left(\frac{1}{x+1}\right)$ puis $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{100}{x^3} \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{x+1}$.

(i) *Solution avec petits o.* On a $\ln(1+2x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x$, $\sin(3x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 3x^2$ et puisque $\frac{3x^2}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ on a $\sin(3x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(\ln(1+2x))$.

Ainsi

$$\sin(3x^2) + \ln(1+2x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(1+2x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x$$

Solution sans les petits o. On factorise par $\ln(1+2x)$ (pas évident *a priori* de voir que ce terme est dominant.. on a fait "au brouillon" $\ln(1+2x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x$, $\sin(3x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 3x^2$ ce qui permet de voir que $\ln(1+2x)$ domine au voisinage de 0).

$$\sin(3x^2) + \ln(1+2x) = \ln(1+2x) \left(1 + \frac{\sin(3x^2)}{\ln(1+2x)} \right).$$

$$\text{Or } \frac{\sin(3x^2)}{\ln(1+2x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{3x^2}{2x} \longrightarrow 0, \text{ d'où}$$

$$\sin(3x^2) + \ln(1+2x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(1+2x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x.$$

$$(j) \sin(e^{-x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}.$$

$$(k) \bullet \ln(5x^2 + e^{2x}) = \ln \left(e^{2x} \left(1 + \frac{5x^2}{e^{2x}} \right) \right) = 2x + \ln \left(\frac{5x^2}{e^{2x}} + 1 \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x.$$

$$\bullet \ln(5x^2 + e^{2x}) = \ln(\underbrace{5x^2 + e^{2x} - 1}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} + 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 5x^2 + e^{2x} - 1. \text{ Or } e^{2x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x \text{ et } 5x^2 = o(2x), \text{ d'où } 5x^2 + e^{2x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x, \text{ et ainsi } \ln(5x^2 + e^{2x}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x.$$

$$(l) f(x) = \frac{e^{x^2} \left(1 + \frac{3x^2}{e^{x^2}} \right)}{x^5 \left(1 + \frac{\ln x}{x^5} \right)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{x^5}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} + 3x^2 = 1 \text{ et } x^5 + \ln(x) = \ln(x) \left(\frac{x^5}{\ln x} + 1 \right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln x, \text{ d'où } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\ln x}.$$

Exercice 283. Déterminer l'ensemble de définition, puis les asymptotes éventuelles des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}, \quad f_2 : x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}, \quad f_3 : x \mapsto \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x - 1}.$$

Corrigé 283. On notera $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition pour chaque question, et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction.

$$1. \text{ Après une étude de signe, on obtient } \mathcal{D} = \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right] \cup]1; +\infty[.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \sqrt{2}, \text{ donc la droite d'équation } y = \sqrt{2} \text{ est asymptote à } \mathcal{C} \text{ au voisinage de } \pm\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty, \text{ donc la droite d'équation } x = 1 \text{ est asymptote à } \mathcal{C}.$$

$$2. \mathcal{D} = \mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}. f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} x, \text{ puis } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = -2, \text{ donc } y = x - 2 \text{ est asymptote à } \mathcal{C} \text{ au voisinage de } \pm\infty.$$

$$f(x) = \frac{(x-1)^2 x}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1)x}{x+1}, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{ et } \mathcal{C} \text{ n'admet pas d'asymptote en } 1. \text{ Par ailleurs,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1\pm} f(x) = \pm\infty, \text{ donc } \mathcal{C} \text{ admet la droite d'équation } x = -1 \text{ comme asymptote verticale.}$$

$$3. \mathcal{D} =]0; 1[\cup]1; +\infty[. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty, \text{ donc } \mathcal{C} \text{ admet la droite d'équation } x = 0 \text{ comme asymptote.}$$

$$f(x) = \frac{(x-1) \left(x + 1 + \frac{\ln x}{x-1} \right)}{x-1} = x + 1 + \frac{\ln x}{x-1}. \text{ Or } \frac{\ln x}{x-1} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{x-1}{x-1} = 1, \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3, \text{ donc } \mathcal{C} \text{ n'admet pas d'asymptote au voisinage de } 3.$$

$$\text{On a } \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x-1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x, \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 1, \text{ donc } y = x + 1 \text{ est asymptote à } \mathcal{C} \text{ au voisinage de } +\infty.$$