
Entiers, ensembles finis, dénombrement

.....

Exercice 177. Une urne contient cinq boules rouges numérotées de 1 à 5, et sept boules noires numérotées de 1 à 7. On effectue quatre tirages successifs et avec remise. Dénombrer

1. les différents tirages possibles ;
2. les tirages amenant quatre boules rouges ;
3. les tirages amenant au moins une boule rouge ;
4. les tirages amenant trois boules rouges et une boule noire ;
5. les tirages bicolores.

Reprendre chacune de ces questions dans le cas de tirages successifs et sans remise, puis dans le cas de tirages simultanés.

Corrigé 177. I. Tirages successifs et avec remise.

1. Le nombre de tirages correspond au nombre de 4-listes d'un ensemble à 12 éléments, à savoir 12^4 (on choisit la première boule : 12 choix, puis la deuxième boule : 12 choix, etc.).
2. On choisit la première boule rouge (5 possibilités), puis la deuxième (5 possibilités), etc. En tout, il y a 5^4 possibilités.
3. On dénombre plutôt les tirages ne contenant aucune boule rouge, ce qui revient à ne choisir que des boules noires : il y a 7^4 choix. Donc il y a $12^4 - 7^4$ tirages amenant au moins une boule rouge.
4.
 - Choix de la position de la boule noire : 4 possibilités ;
 - choix de la boule noire : 7 possibilités ;
 - choix des boules rouges : 5^3 possibilités.

En tout, il y a $4 \times 7 \times 5^3$ possibilités.

5. On considère des ensembles disjoints :
 - A_1 : « 1 boule noire, 3 boules rouges ». $\text{Card}(A_1) = \binom{4}{1} \times 7 \times 5^3$ (choix de la position de la boule noire, choix de la boule noire, choix des trois boules rouges).
 - A_2 : « 2 boules noires, 2 boules rouges ». $\text{Card}(A_2) = \binom{4}{2} \times 7^2 \times 5^2$ (choix des positions des boules noires, choix des boules noires, choix des boules rouges).
 - A_3 : « 3 boules noires, 1 boule rouge ». $\text{Card}(A_3) = \binom{4}{1} \times 7^3 \times 5$ (choix de la position de la boule rouge, choix des trois boules noires, choix de la boule rouge).

En tout, il y a $\binom{4}{1} \times 7 \times 5^3 + \binom{4}{2} \times 7^2 \times 5^2 + \binom{4}{1} \times 7^3 \times 5$ tirages bicolores.

Autre solution : On dénombre les tirages où toutes les boules sont de la même couleur :

- N : « toutes les boules sont noires ». $\text{Card}(N) = 7^4$.
- R : « toutes les boules sont rouges ». $\text{Card}(R) = 5^4$.

Finalement, le nombre de tirages bicolores est $12^4 - 7^4 - 5^4$.

II. Tirages successifs et sans remise.

1. Le nombre de tirages correspond au nombre de 4-arrangements d'un ensemble à 12 éléments, à savoir $12 \times 11 \times 10 \times 9 = \frac{12!}{8!}$ (on choisit la première boule : 12 choix, puis la deuxième boule : 11 choix, etc.).
2. On choisit la première boule rouge (5 possibilités), puis la deuxième (4 possibilités), etc. En tout, il y a $\frac{5!}{1!} = 5!$ possibilités.
3. On dénombre plutôt les tirages ne contenant aucune boule rouge, ce qui revient à ne choisir que des boules noires : il y a $\frac{7!}{3!}$ choix. Donc il y a $\frac{12!}{8!} - \frac{7!}{3!}$ tirages amenant au moins une boule rouge.
4.
 - Choix de la position de la boule noire : 4 possibilités ;
 - choix de la boule noire : 7 possibilités ;

- choix des boules rouges : $5 \times 4 \times 3 = \frac{5!}{2!}$ possibilités.

En tout, il y a $4 \times 7 \times \frac{5!}{2!}$ possibilités.

5. On considère des ensembles disjoints :

- A_1 : « 1 boule noire, 3 boules rouges ». $\text{Card}(A_1) = \binom{4}{1} \times 7 \times \frac{5!}{2!}$ (choix de la position de la boule noire, choix de la boule noire, choix des trois boules rouges).
- A_2 : « 2 boules noires, 2 boules rouges ». $\text{Card}(A_2) = \binom{4}{2} \times \frac{7!}{5!} \times \frac{5!}{3!}$ (choix des positions des boules noires, choix des boules noires, choix des boules rouges).
- A_3 : « 3 boules noires, 1 boule rouge ». $\text{Card}(A_3) = \binom{4}{1} \times \frac{7!}{4!} \times 5$ (choix de la position de la boule rouge, choix des trois boules noires, choix de la boule rouge).

En tout, il y a $\binom{4}{1} \times 7 \times \frac{5!}{2!} + \binom{4}{2} \times \frac{7!}{5!} \times \frac{5!}{3!} + \binom{4}{1} \times \frac{7!}{4!} \times 5$ tirages bicolores.

Autre solution : On dénombre les tirages tirages où toutes les boules sont toutes de la même couleur :

- N : « toutes les boules sont noires ». $\text{Card}(N) = \frac{7!}{3!}$.
- R : « toutes les boules sont rouges ». $\text{Card}(R) = \frac{5!}{1!} = 5!$.

Finalement, le nombre de tirages bicolores est $\frac{12!}{8!} - \frac{7!}{3!} - 5!$.

III. Tirages simultanés.

1. Le tirage est simultané : on utilise des combinaisons. Il y a $\binom{12}{4}$ tirages possibles.
2. On choisit 4 boules parmi 5 boules rouges : il y a $\binom{5}{4}$ possibilités.
3. Il y a $\binom{7}{4}$ tirages avec uniquement des boules noires, d'où $\binom{12}{4} - \binom{7}{4}$ tirages avec au moins une boule rouge.
4. On choisit les boules rouges ($\binom{5}{3}$ possibilités) puis la boule noire ($\binom{7}{1} = 7$ possibilités). Donc en tout, il y a $\binom{5}{3} \times 7$ choix.
5. Il y a $\binom{7}{4}$ tirages où toutes les boules sont noires, et $\binom{5}{4}$ tirages où toutes les boules sont rouges. Donc il y a $\binom{12}{4} - \binom{7}{4} - \binom{5}{4}$ tirages bicolores.

Autre solution. On peut utiliser le résultat de II.5. : il y a exactement $\frac{12!}{8!} - \frac{7!}{3!} - 5!$ tirages avec remises qui répondent à la question. La différence dans un tirage simultanée est que l'ordre ne compte pas. Or il y a 4! permutations possibles de 4 boules, donc on a exactement $\frac{1}{4!}(\frac{12!}{8!} - \frac{7!}{3!} - 5!)$ tirages simultanés qui répondent à la question.

Exercice 178. Soit A un ensemble fini de cardinal n , et B une partie de A de cardinal p . Dénombrer les parties X de A vérifiant $B \subset X \subset A$.

Corrigé 178. Pour construire une partie X de A vérifiant $B \subset X \subset A$, on peut raisonner par étapes :

- choisir tous les éléments de B : 1 possibilité ;
- choisir une partie de $A \setminus B$: 2^{n-p} possibilités, car $A \setminus B$ est de cardinal $n - p$.

On obtient donc 2^{n-p} parties X de A telles que $B \subset X \subset A$.

Exercice 179. Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Déterminer le nombre d'applications surjectives de E dans E .
2. Déterminer le nombre d'applications de E dans E qui ne sont pas surjectives.
3. Déterminer le nombre d'applications surjectives de E dans $\{0, 1\}$.
4. Déterminer le nombre d'applications surjectives de E dans $\{0, 1, 2\}$.

Corrigé 179. 1. E étant de cardinal fini, on sait qu'une application de E dans E est surjective si et seulement si elle est bijective. Ainsi, le nombre d'applications surjectives de E dans E est le nombre de permutations de E : $n!$.

2. On applique la formule du cardinal du complémentaire. Il y a n^n applications de E dans E dont $n!$ surjectives. Il y a donc $n^n - n!$ applications de E dans E non surjectives.

3. Il y a 2^n applications de E dans $\{0, 1\}$. Parmi celles-ci, celles qui ne sont pas surjectives sont les applications constantes : elles sont au nombre de 2. Il y a donc $2^n - 2$ applications surjectives de E dans $\{0, 1\}$.

Autre démarche possible : on dénombre le nombre d'applications surjectives de E dans $\{0, 1\}$ suivant le nombre d'antécédents de 0 : notons k le nombre d'antécédents de 0 : $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ car l'application est surjective (0 et 1 ont au moins un antécédent). Pour définir l'application, il ne reste qu'à choisir les k antécédents de 0 dans E , les éléments restant auront pour image 1. Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir ces antécédents. Il y a donc $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}$ applications surjectives de E dans $\{0, 1\}$, avec :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k \times 1^{n-k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{n} = 2^n - 2$$

4. On reprend la démarche précédente : il y a 3^n applications de E dans E . Celles qui ne sont pas surjectives sont celles qui ont pour image l'un des ensembles suivants :

$$\{0\} \qquad \{1\} \qquad \{2\} \qquad \{0, 1\} \qquad \{0, 2\} \qquad \{1, 2\}$$

Il y a exactement une application dont l'image est un ensemble donné de cardinal 1, et d'après la question précédente, $2^n - 2$ applications dont l'image est un ensemble donné de cardinal 2. Puisqu'il y a 3 parties de E de cardinal 1, et 3 parties de cardinal 2, il y a donc $3 + 3 \times (2^n - 2)$ applications de E dans $\{0, 1, 2\}$ qui ne sont pas surjectives.

Il y a donc $3^n - 3 \times 2^n + 3$ applications surjectives de E dans $\{0, 1, 2\}$.