
Suites réelles et complexes

.....

Exercice 209. 1. Déterminer le terme général des suites définies par :

- (a) $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 1$.
- (b) $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = 4v_n^3$.
- (c) $w_0 = 0$, $w_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $w_{n+2} = 6w_{n+1} - 9w_n$.
- (d) $r_0 = 2$, $r_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $r_{n+2} = 6r_{n+1} - 8r_n + 2$.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Calculer $\sum_{k=2}^n u_k$ et $\sum_{k=3}^n r_k$.

Corrigé 209. 1. (a) Pour tout $r \in \mathbf{R}$, $3r - 1 = r \iff r = \frac{1}{2}$. Considérons la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $a_n = u_n - \frac{1}{2}$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on a

$$a_{n+1} = 3u_n - 1 - \frac{1}{2} = 3\left(u_n - \frac{1}{2}\right) = 3a_n$$

donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = a_0 \times 3^n = \frac{3}{2} \times 3^n$, puis $u_n = \frac{3}{2} \times 3^n + \frac{1}{2}$.

- (b) *Méthode 1.* On démontre facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n > 0$. Introduisons $\tilde{v}_n = \ln(v_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\tilde{v}_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln(4v_n^3) = \ln(4) + 3\ln(v_n) = \ln(4) + 3\tilde{v}_n,$$

donc $\tilde{v}$ est une suite arithmético-géométrique. En procédant comme avant, on détermine que $(\tilde{v}_n + \frac{\ln(4)}{2})_{n \in \mathbf{N}} = (\tilde{v} + \ln(2))_{n \in \mathbf{N}}$ est géométrique de raison 3, d'où, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$\tilde{v}_n + \ln(2) = (\tilde{v}_0 + \ln(2))3^n \quad \text{i.e.} \quad \tilde{v}_n = (\tilde{v}_0 + \ln(2))3^n - \ln(2) = \ln(2)(3^n - 1) = \ln(2^{3^n - 1})$$

d'où, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$v_n = 2^{3^n - 1}.$$

Méthode 2. Pour $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = 4v_n^3 = 4 \times 4^3 \times v_{n-1}^{3 \times 3} = 4 \times 4^3 \times 4^9 \times v_{n-2}^{3 \times 3 \times 3} = \dots = 4^{\frac{3^n - 1}{2}} \times 1 = 2^{3^n - 1}$. Il reste à faire une récurrence pour démontrer cette conjecture (aucune difficulté particulière).

- (c) Le polynôme caractéristique $X^2 - 6X + 9$ a pour unique racine (double) 3, donc il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$w_n = (\alpha n + \beta)3^n$$

Par ailleurs,

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_1 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 0 \\ (\alpha + \beta) \times 3 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $w_n = \frac{2}{3} \times n \times 3^n = 2n3^{n-1}$.

- (d) Notons $H = \{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n\}$ et $E = \{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n + 2\}$. Le cours assure que $H = \{n \mapsto \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot 4^n : (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2\}$.

Cherchons un élément de E (une solution particulière, si on fait l'analogie avec les équations différentielles) qu'on note $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$, sous la forme d'une suite constante égale $c \in \mathbf{R}$. On a

$$v \in E \iff \forall n \in \mathbf{N}, v_{n+2} = 6v_n - 8v_n + 2 \iff c = 6c - 8c + 2 \iff c = \frac{2}{3}.$$

Ainsi la suite v constante égale à $\frac{2}{3}$ est un élément de E .

Soit $u \in E$. On a

$$\begin{aligned} u \in E &\iff \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} - 6u_{n+1} + 8u_n = 2 \\ &\iff \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} - 6u_{n+1} + 8u_n = v_{n+2} - 6v_{n+1} + 8v_n \\ &\iff \forall n \in \mathbf{N}, (u_{n+2} - v_{n+2} - 6(u_{n+1} - v_{n+1}) + 8(u_n - v_n)) = 0 \\ &\iff u - v \in H \\ &\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2, \forall n \in \mathbf{N}, u_n - v_n = \alpha \cdot 2^n + \beta 3^n \\ &\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2, \forall n \in \mathbf{N}, u_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot 4^n + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $r_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot 4^n + \frac{2}{3}$. En considérant r_0 et r_1 , on trouve

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad r_n = 3 \cdot 2^{n-1} - \frac{4^n}{6} + \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \sum_{k=2}^n u_k &= \frac{3}{2} \sum_{k=2}^n 3^k + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n 1 = \frac{9}{4}(3^n - 3) + \frac{n-1}{2}. \\ \sum_{k=3}^n r_k &= \frac{3}{2} \sum_{k=3}^n 2^k - \frac{1}{6} \sum_{k=3}^n 4^k + \frac{2}{3} \sum_{k=3}^n 1 = 3(2^n - 4) - \frac{2}{9}(4^n - 16) + \frac{2(n-2)}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 210. Déterminer le terme général de la suite réelle u définie par :

1. $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.
2. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} - 1$.
3. $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.
4. $u_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = -u_n + 4$.
5. $u_0 = 3$, $u_1 = 4$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$.
6. $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
7. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
8. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.
9. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.
10. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.
11. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$. Montrer qu'on peut écrire le terme général sous la forme $u_n = A \cos(n\theta + \phi)$, où A , θ et ϕ sont des réels à préciser. Montrer que u est périodique de période 3.
12. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
13. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n$.
14. $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} - 4u_n$.

Corrigé 210. Je ne détaille que les questions 1. et 5., mais toutes doivent être rédigées suivant ce schéma.

1. La racine de $X = \frac{1}{3}X + 2$ est 3. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3)$$

donc $(u_n - 3)_{n \in \mathbf{N}}$ est géométrique de raison 3. Finalement, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (u_0 - 3) + 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3.$$

2. On trouve, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - 2) + 2$.
3. On trouve, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 3^2(u_0 - 1) + 1$.

4. On trouve, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (-1)^n(u_0 - 2) + 2$.
5. L'équation caractéristique $r^2 = r + 6$ admet 3 et -2 comme solutions. Il s'ensuit qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = \alpha \cdot 3^n + \beta \cdot (-2)^n.$$

Or

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_1 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ 3\alpha - 2\beta = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 2 \cdot 3^n + (-2)^n$.

6. On trouve, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.
7. On trouve, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 2^n$.
8. On trouve, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (1 - \frac{n}{3})3^n$.
9. On trouve, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (1 - n)2^{-n}$.
10. Les solutions de l'équation caractéristique sont $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\pi}{4}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-i\pi}{4}}$. On trouve pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (\frac{1}{\sqrt{2}})^n \cdot 2 \cdot \sin(\frac{n\pi}{4})$.
11. Les solutions de l'équation caractéristique sont $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{-2i\pi}{3}}$. On trouve pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \cos(\frac{2n\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\frac{2n\pi}{3}) = \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\frac{2n\pi}{3}) + \frac{1}{2} \sin(\frac{2n\pi}{3})) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\frac{2n\pi}{3} - \frac{\pi}{6})$. De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\frac{2n\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\frac{2n\pi}{3} + 2\pi - \frac{\pi}{6}) = u_n$, donc u est 3-périodique.
12. On trouve, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (1 - n)2^n$.
13. On trouve, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 2^n(\cos(\frac{2n\pi}{3}) + \sqrt{3} \sin(\frac{2n\pi}{3}))$.
14. Les solutions de l'équation caractéristique sont $z_0 = \frac{-1+\sqrt{15}i}{2}$ et $\bar{z}_0 = \frac{-1-\sqrt{15}i}{2}$. On a $|z_0| = 2$. Notons θ l'argument principal de z_0 . On a $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{15}}{2}$, d'où $\tan(\theta) = -\sqrt{15}$, puis $\theta \equiv \text{Arctan}(-\sqrt{15}) [\pi]$. Or, $\cos(\theta) < 0$ et $\sin(\theta) > 0$, donc $\theta \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$, puis $\theta - \pi \in]0; \frac{\pi}{2}[$. La relation de congruence précédente fournit alors $\theta = \pi + \text{Arctan}(-\sqrt{15}) = \pi - \text{Arctan}(\sqrt{15})$ (car Arctan est impaire). Ainsi, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 2^n(\alpha \cos(n(\pi - \text{Arctan}(\sqrt{15}))) + \beta \sin(n(\pi - \text{Arctan}(\sqrt{15}))))$. En utilisant u_0 et u_1 , on trouve

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = 2^n \left(\cos(n(\pi - \text{Arctan}(\sqrt{15}))) + \frac{\sqrt{15}}{5} \sin(n(\pi - \text{Arctan}(\sqrt{15}))) \right).$$