
Calcul matriciel, limites et continuité

.....

Exercice 285. Déterminer les réels a et b tels que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x < -2 \\ a & \text{si } x = -2 \\ (2x+b)^2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

soit continue sur $\mathbf{R}$.

Corrigé 285. $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = 9$, donc $a = 9$.

$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = (-4+b)^2$, donc $(-4+b)^2 = 9$, puis $-4+b = \pm 3$, puis $b \in \{1, 7\}$.

.....

Exercice 286. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$|f(x)| \leq |\sin(x)|.$$

Cette application est-elle continue en 0 ?

Corrigé 286. On a $|f(0)| \leq |\sin(0)|$, donc $f(0) = 0$. Par ailleurs, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} -\sin x = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sin x = 0$, donc le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 0$. De même, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$. Finalement, f est continue en 0.

.....

Exercice 287. Soit $f :]0; 1] \rightarrow \mathbf{R}$
$$x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin x}.$$
 Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

Corrigé 287. On a

$$f(x) = \frac{1+x-1+x}{\sin(x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$$

donc on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.