
Entiers, ensembles finis, dénombrement

.....

Exercice 180. On répartit n boules indiscernables dans trois boîtes différentes. Combien y a-t-il de répartitions telles que deux boîtes exactement contiennent des boules ?

Corrigé 180. Dans cet exercice, les boules sont indiscernables, mais les boîtes peuvent être distinguées : numérotons les boîtes.

Pour décrire une répartition des n boules dans les trois boîtes telle que deux boîtes exactement contiennent des boules, raisonnons par étapes :

- choix de la boîte vide : 3 possibilités ;
- choix du nombre de boules de la première boîte non vide (entre 1 et $n - 1$) : $n - 1$ possibilités ;
- choix du nombre de boules de la seconde boîte non vide (elle reçoit toutes les boules restantes) : 1 possibilité.

Il y a donc $3(n - 1)$ répartitions de n boules telles que deux boîtes exactement contiennent des boules.

.....

Exercice 181. Une liste palindrome est une liste qui se lit de la même façon à l'endroit ou à l'envers, comme 12321 ou 052250.

1. Combien y a-t-il de listes palindromes à 15 chiffres ?
2. Combien y a-t-il de listes de 5 chiffres où 0 figure une fois et une seule ?
3. Combien y a-t-il de listes de 5 chiffres comportant un chiffre répété et un seul ?
4. Combien y a-t-il de listes formant une suite de 5 chiffres strictement croissantes ?

Corrigé 181. 1. Dans une liste palindrome à 15 chiffres, les 7 chiffres du début sont égaux à ceux de la fin lus à l'envers. Pour construire une liste palindrome à 15 chiffres, on choisit donc $7 + 1 = 8$ chiffres dans $\llbracket 0, 9 \rrbracket$: il y en a 10^8 .

2. Pour construire une telle liste :

- on choisit la place du 0 dans la liste : 5 places possibles
- on choisit la valeur de chacun des 4 autres chiffres : 9 possibilités chacun

Au total : 5×9^4 listes de 5 chiffres contenant une et une seule fois le chiffre 0.

3. Pour construire une telle liste :

- on choisit le chiffre répété : 10 possibilités
- on choisit la place des deux chiffres répétés : $\binom{5}{2}$ possibilités
- on choisit les autres chiffres : $9 \times 8 \times 7$ (on ne peut pas prendre un chiffre déjà choisi)

Au total, il y a $10 \times \binom{5}{2} \times 9 \times 8 \times 7$ listes de 5 chiffres comportant un chiffre répété et un seul, le chiffre répété étant répété une seule fois. Il reste à dénombrer les listes où le chiffre est répété 3, 4 ou 5 fois.

Pour un chiffre répété 3 fois :

- choix du chiffre répété : 10
- choix de la place des trois chiffres répétés : $\binom{5}{3}$
- choix des deux autres chiffres : 9×8

ce qui fait $10 \times \binom{5}{3} \times 9 \times 8$ listes comportant un chiffre répété exactement trois fois, et un seul.

De même, on obtient $10 \times 5 \times 9$ listes comportant un chiffre répété exactement quatre fois, et un seul, et 10 listes comportant un chiffre répété 5 fois.

Au final, on obtient :

$$10 \times \binom{5}{2} \times 9 \times 8 \times 7 + 10 \times \binom{5}{3} \times 9 \times 8 + 10 \times 5 \times 9 + 10 = 58060$$

listes comportant un chiffre répété et un seul.

4. Pour construire une telle liste : on choisit 5 chiffres distincts et on les range dans l'ordre croissant. Il y a donc $\binom{10}{5}$ listes de 5 chiffres formant une suite strictement croissante.

Exercice 182. On dispose dix jetons de Scrabble portant les lettres de l'alphabet de A à J.

- Combien de mots de dix lettres (ayant un sens ou non) peut-on écrire avec ?
- Combien de mots de dix lettres (ayant un sens ou non) peut-on écrire où B, A et C apparaissent dans ce ordre et côte à côte ?

Corrigé 182. 1. Un mot est une permutation des 10 jetons. Il y a donc $10!$ mots possibles.

- Pour former un tel mot :
 - on choisit la place du B : 8 possibilités (il faut pouvoir mettre A et C derrière)
 - les lettres A et C sont alors placés
 - on choisit la place des 7 lettres restantes : $7!$ possibilités

Il y a donc $8 \times 7!$ soit $8!$ mots de 10 lettres où les lettres B, A, C apparaissent dans cet ordre.

Remarque : on peut aussi les dénombrer en considérant le bloc BAC comme une seule lettre, ce qui mène au même résultat.

Exercice 183. Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Corrigé 183. Pour construire une application strictement croissante de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on choisit les images des éléments de $\llbracket 1, p \rrbracket$: on choisit p entiers distincts deux à deux dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, puis on les range dans l'ordre croissant : le plus petit est l'image de 1, le suivant l'image de 2, etc. Il y a donc $\binom{n}{p}$ applications de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ strictement croissantes.

Exercice 184. On se place dans le plan muni du quadrillage $\mathbb{N}^2$. On ne peut se déplacer que vers la droite ou vers le haut.

- Combien y a-t-il de chemins permettant de relier le point $(0, 0)$ au point $(2, 2)$?
- Combien y a-t-il de chemins permettant de relier le point $(0, 0)$ au point $(4, 4)$?
- Parmi ces chemins, combien y en a-t-il passant par le point $(1, 2)$?

Corrigé 184. Représentons chaque déplacement vers la droite par la lettre D et chaque déplacement vers le haut par la lettre H. Un chemin est alors représenté par un mot composé uniquement des lettres D et H.

- Pour aller de $(0, 0)$ à $(2, 2)$, il faut se déplacer 2 fois vers la droite et 2 fois vers le haut. Un chemin joignant ces deux points est donc représenté par un mot de 4 lettres composés de 2 D et 2 H. Pour construire un tel mot, on choisit la place des deux D. Les deux H occupent alors les places restantes. Il y a donc $\binom{4}{2}$ chemins joignant ces deux points, ce qui en fait 6.
- Ici, on doit se déplacer 4 fois vers la droite et 4 fois vers le haut, il y a donc $\binom{8}{4}$ tels chemins, c'est-à-dire 70.
- Puisqu'on ne peut pas se déplacer vers la gauche ou vers le bas, un tel chemin est composé de deux parties :
 - un chemin joignant le point $(0, 0)$ au point $(1, 2)$: il y en a $\binom{3}{1} = 3$ différents ;
 - un chemin joignant le point $(1, 2)$ au point $(4, 4)$: il y en a $\binom{5}{2} = 10$ différents.

Au final, il y a 30 chemins joignant $(0, 0)$ à $(4, 4)$ et passant par $(1, 2)$.