
Suites réelles et complexes

.....

Exercice 211. On note E l'ensemble des suites réelles u vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n + 9n^2.$$

1. Montrer que E contient une suite de la forme $(an^2 + bn + c)_{n \in \mathbf{N}}$, avec $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$.
2. En déduire l'expression du terme général d'une suite d'éléments de E .
3. Montrer qu'il existe une unique suite u dans E vérifiant $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, et donner l'expression de son terme général.

Corrigé 211. 1. *Analyse.* Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = an^2 + bn + c$. Supposons que $u \in E$. Alors,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n + 9n^2,$$

puis $an^2 + (4a + b)n + 4a + 2b + c = (10a + 9)n^2 + (4a + 10b)n + 2a + 2b + 10c$. Ainsi,

$$\begin{cases} a &= 10a + 9 \\ 4a + b &= 4a + 10b \\ 4a + 2b + c &= 2a + 2b + 10c \end{cases}$$

On en déduit $(a, b, c) = (-1, 0, -\frac{2}{9})$.

Synthèse. Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = -n^2 - \frac{2}{9}$. On vérifie immédiatement que $u \in E$.

2. Notons H l'ensemble des suites réelles u vérifiant, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n$. Le cours assure que

$$H = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ n & \longmapsto & \alpha \cdot (-2)^n + \beta \cdot 4^n \end{array} : (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Notons v la suite obtenue à la question précédente. Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

$$\begin{aligned} u \in E &\iff \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n + 9n^2 \\ &\iff \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} - v_{n+2} = 2(u_{n+1} - v_{n+1}) + 8(u_n - v_n) = 0 \\ &\iff u - v \in H \\ &\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2, \quad \forall n \in \mathbf{N}, u_n - v_n = \alpha \cdot (-2)^n + \beta \cdot 4^n \end{aligned}$$

Finalement,

$$E = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ n & \longmapsto & \alpha \cdot (-2)^n + \beta \cdot 4^n - n^2 - \frac{2}{9} \end{array} : (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

3. Soit $u \in E$. Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \alpha \cdot (-2)^n + \beta \cdot 4^n - n^2 - \frac{2}{9}$.

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta &= -\frac{2}{9} \\ -2\alpha + 4\beta &= -\frac{11}{9} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha &= -\frac{2}{9} \\ \beta &= \frac{4}{9} \end{cases}.$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \frac{1}{9}((-2)^{n+1} + 4^{n+1} - 9n^2 - 2)$.

.....

Exercice 213 (Critère de D'Alembert). Soit u une suite de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe un réel k tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$.

1. Montrer que si $k < 1$, alors u converge vers 0.
2. Montrer que si $k > 1$, alors u diverge vers $+\infty$.

Corrigé 213. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$k - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k + \varepsilon.$$

1. On a alors, pour tout $n \geq n_0$, $u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \dots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \times u_{n_0} \leq (1 + \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}$ (on peut démontrer cela par récurrence sans difficulté). On en déduit que, pour tout $n \geq n_0$,

$$0 \leq u_n \leq (k + \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}.$$

Considérons l'inégalité précédente avec $\varepsilon = \frac{1-k}{2} > 0$, de sorte que $k + \varepsilon \in]0; 1[$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (k + \varepsilon)^{n-n_0} = 0$, donc le théorème d'encadrement permet de conclure que u converge vers 0.

2. On peut montrer que, pour tout $n \geq n_0$,

$$u_n \geq (k - \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}.$$

Considérons cette inégalité avec $\varepsilon = \frac{k-1}{2} > 0$, de sorte que $k - \varepsilon > 1$. Il s'ensuit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (k - \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0} = +\infty$ (puisque $u_{n_0} > 0$), et donc, avec le théorème de minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Remarque : si $k = 1$, on ne peut rien conclure. Pour $u = 1$, u tend vers 1. Pour u définie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$, u converge vers 0.

Exercice 214. Déterminer, si elles existent, les limites des suites de terme général :

- | | | | |
|----------------------------------|---|--|---|
| (1) $\frac{1}{n+2}$; | (6) $\frac{1+e^{-n}}{4+e^n}$; | (11) $\sqrt{n^2+1} - n$; | (16) $\sum_{p=1}^n \frac{1}{(n+p)^2}$; |
| (2) $\frac{n^2-5n}{3n^2+4n^3}$; | (7) $\frac{e^{2n}+3}{(e^n+5)^2}$; | (12) $\left(n^2 + \frac{1}{n}\right) e^{-n^2}$; | (17) $\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k!$; |
| (3) $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$; | (8) $\frac{2^n+3^n}{4 \cdot 2^n - 3^{n+1}}$; | (13) $(-1)^n$; | (18) $\frac{1}{n} \lfloor \sqrt{n} \rfloor$; |
| (4) $\sqrt{n+3} - \sqrt{n}$; | (9) $\frac{10^{n+3}}{n+3^{2n+1}}$; | (14) $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$; | (19) $\frac{\cos\left(\frac{n^3}{n^2}\right)}{n^2}$; |
| (5) $\frac{2^n}{n^6+n^3+1}$; | (10) $\frac{\ln(n^2+1)}{n+1}$; | (15) $n + (-1)^n \sqrt{n}$; | (20) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$. |

Corrigé 214. (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n+2 = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+2} = 0$.

(2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. $u_n = \frac{n^2(1-\frac{5}{n})}{n^3(\frac{3}{n}+4)}$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(3) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. $u_n = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

(4) Soit $n \in \mathbf{N}$. $u_n = \frac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(5) Soit $n \in \mathbf{N}$. $u_n = \frac{2^n}{n^6(1+n^{-3}+n^{-6})}$, donc avec le théorème des croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

(6) Par opérations on obtient immédiatement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(7) Soit $n \in \mathbf{N}$. $u_n = \frac{e^{2n}(1+3e^{-2n})}{e^{2n}(1+10e^{-n}+25e^{-2n})}$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

(8) Soit $n \in \mathbf{N}$. $u_n = \frac{3^n((\frac{2}{3})^n+1)}{3^n(4(\frac{2}{3})^n-3)}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{1}{3}$.

- (9) Soit $n \in \mathbf{N}$. $u_n = \frac{1000}{n9^{-n} + 3} \left(\frac{10}{9} \right)^n$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1000}{n9^{-n} + 3} = \frac{1000}{3}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- (10) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. $u_n = \frac{2 \ln(n)}{n+1} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{n+1}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(n)}{n+1} = 0$ (croissances comparées) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{n+1} = 0$ (opérations sur les limites), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- (11) Soit $n \in \mathbf{N}$. $u_n = \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2}}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- (12) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 e^{-n^2} = 0$ par croissances comparées et composition, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n^2}}{n} = 0$ par opérations, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- (13) $\lim_{p \rightarrow +\infty} (-1)^{2p} = 1$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} (-1)^{2p+1} = -1$, donc la suite n'admet pas de limite.
- (14) $\lim_{p \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{8p\pi}{4}\right) = 1$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{(8p+4)\pi}{4}\right) = -1$, donc la suite n'admet pas de limite.
- (15) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. $u_n = n(1 + (-1)^n n^{-1/2})$. Donc $n(1 - n^{-1/2}) \leq u_n$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- (16) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. $\frac{1}{(n+p)^2} \leq \frac{1}{n^2}$, donc $\sum_{p=1}^n \frac{1}{(n+p)^2} \leq \frac{n}{n^2}$, puis, avec le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- (17) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. $u_n = 1 + \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n-1} k!$, donc $u_n \geq 1$.
- Par ailleurs, pour $n \geq 3$, $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n-2} k! \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{(n-2)(n-2)!}{n!} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)}$. Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
- (18) On a, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ $\frac{\sqrt{n}-1}{n} < \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ et on conclut par encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- (19) On a, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $-\frac{1}{n^2} \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$, donc on conclut par encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- (20) Soit $n \geq 3$. $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq \frac{5}{6}$, puis $u_n \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$ et par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 215. Déterminer la limite de la suite u de terme général $u_n = (1 + 2^n)^{\frac{1}{n}}$. Plus généralement, si $(a, b) \in (\mathbf{R}_+)^2$, étudier la limite de la suite u de terme général $u_n = (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$.

Corrigé 215. • Soit $n \in \mathbf{N}^*$. $(1 + 2^n)^{\frac{1}{n}} = 2(1 + 2^{-n})^{\frac{1}{n}} = 2 \exp(\frac{1}{n} \ln(1 + 2^{-n}))$ donc, par opérations, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

- Si $a > b$, $(a^n + b^n)^{1/n} = a(1 + (\frac{b}{a})^n)^{1/n} = a \exp(\frac{1}{n} \ln(1 + (\frac{b}{a})^n))$ donc, par opérations et comme $((\frac{a}{b})^n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0 (car $|\frac{a}{b}| < 1$), $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

Le cas $a \leq b$ est similaire (il suffit d'échanger les rôles de a et b).

Si $a = b$, on a $(a^n + b^n)^{1/n} = (2a^n)^{1/n} = 2^{1/n} a = \exp(\frac{1}{n} \ln(2)) a$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a^n + b^n)^{1/n} = a$.

Finalement, pour a et b quelconques, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a^n + b^n)^{1/n} = \max(a, b)$.

Exercice 220. Soient u et v deux suites de nombres réels appartenant à $[0; 1]$ telles que la suite uv converge vers 1. Montrer que les suites u et v convergent également vers 1. On pourra chercher à utiliser le théorème des gendarmes après avoir encadré la suite u .

Corrigé 220. On a $0 \leq u \leq 1$, donc, puisque $v \geq 0$, $0 \leq uv \leq v$. Or $v \leq 1$, d'où $uv \leq v \leq 1$. De plus, uv converge vers 1, donc le théorème d'encadrement assure que v converge vers 1. On montre de même que u converge vers 1 (on échange les rôles de u et de v).

.....

Exercice 221. Le but de l'exercice est de déterminer la limite de la suite u de terme général

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

1. Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire un encadrement du terme $\ln(u_n)$, où $n \in \mathbf{N}^*$.
3. Montrer que la suite de terme général $\ln(u_n)$ converge et déterminer sa limite.
4. Conclure.

Corrigé 221. 1. Considérons $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$, définie et dérivable sur $\mathbf{R}_+$ avec $f' : x \mapsto \frac{1}{1+x} - 1$. On a, pour $x \geq 0$, $f'(x) \geq 0 \iff x \leq 0$, donc f le maximum de f est atteint en 0, et il vaut $f(0) = 0$. Ainsi $f \leq 0$, i.e. $\ln(1+x) \leq x$.

Considérons $g : x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$, définie et dérivable sur $\mathbf{R}_+$ avec $f' : x \mapsto \frac{1}{1+x} - 1 + x$. Pour $x \geq 0$, $f'(x) \geq 0 \iff \frac{1}{1+x} \geq 1-x \iff 1-x^2 \leq 0 \iff x \geq 1$. Donc le minimum de g est atteint en 1, et il faut $g(1) = \ln(2) - \frac{1}{2}$. Comme $\ln(2) \approx 0,69$, $g \geq 0$ et l'autre inégalité est démontrée.

2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. $\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$, d'où

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln(u_n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \quad i.e. \quad \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} \leq \ln(u_n) \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

3. Avec le théorème d'encadrement, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \frac{1}{2}$.
4. Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{e}$.