

Limites et continuité

Exercice 287. Soit $f :]0; 1[\rightarrow \mathbf{R}$. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

$$x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin x}$$

Corrigé 287. On a

$$f(x) = \frac{1+x-1+x}{\sin(x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$$

donc on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

Exercice 288. Donner le domaine de définition et étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto [x] + (x - [x])^2, \quad g : x \mapsto \sqrt{(x-1)\ln(x^2-3x+2)}.$$

Corrigé 288. 1. f est définie sur $\mathbf{R}$ en tant que composée de fonctions définies sur $\mathbf{R}$.

Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la fonction est continue sur $[n; n+1[$ en tant que composée de fonctions continues sur cet intervalle. Etudions la continuité en $n \in \mathbf{Z}$.

- $\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = (n-1) + (n - (n-1))^2 = n-1+1 = n;$
- $f(n) = n + (n-n)^2 = n;$
- $\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = n + (n-n)^2 = n.$

Donc f est continue en n . Finalement, f est continue sur $\mathbf{R}$.

2. $X^2 - 3X + 2 = (X-2)(X-1)$, donc $x \mapsto \ln(x^2 - 3x + 2)$ est définie sur $] -\infty; 1[\cup]2; +\infty[$. Par ailleurs, pour $x \in] -\infty; 1[\cup]2; +\infty[$,

$$\ln(x^2 - 3x + 2) \geq 0 \iff x^2 - 3x + 2 \geq 1 \iff x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Or $2 \leq \sqrt{5} \leq 3$, d'où $0 \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq \frac{1}{2}$, puis $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq 1$. On en déduit également $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \geq \frac{5}{2} \geq 2$. Ainsi :

x	$-\infty$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	1	2	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$x-1$	-	-			+	+
$\ln(x^2-3x+2)$	+	0			-	0
$(x-1)\ln(x^2-3x+2)$	-	0			-	0

donc le domaine de définition est $\mathcal{D} = \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}; 1 \right[\cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right[$. La fonction est continue sur $\mathcal{D}$ en tant que composée de fonctions continues sur $\mathcal{D}$.

Complément : $(x-1)\ln(x^2-3x+2) = (x-1)\ln(x-1) + (x-1)\ln(x-2) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} (x-1)\ln(x-1)$, d'où $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.

Il s'ensuit qu'on peut prolonger f par continuité en 1 en posant $f(1) = 0$.

Exercice 289. Déterminer le domaine de définition puis prolonger par continuité en 0 la fonction $f : x \mapsto (1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

Corrigé 289. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$1 + 2x > 0 \iff x > -\frac{1}{2}$$

donc $x \mapsto \ln(1 + 2x)$ est définie sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$. Or la fonction inverse n'est pas définie en 0, donc le domaine de définition de $f : x \mapsto \exp(\frac{1}{x} \ln(1 + 2x))$ est $]-\frac{1}{2}; 0[\cup]0; +\infty[$. On a par ailleurs :

$$\frac{\ln(1 + 2x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2x}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2$$

d'où $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^2$ par composition de limites. Par conséquent on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = e^2$.

Remarque; $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = +\infty$, donc on ne peut pas prolonger f par continuité en $-\frac{1}{2}$.

Exercice 290. Soit $n \in \mathbf{N}$. Peut-on prolonger les fonctions suivantes par continuité en les extrémités finies de leur intervalle de définition ?

- | | | |
|--|--|--|
| (1) $a :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$
$x \mapsto \frac{x^3 + 6x + 7}{x^3 + 1}$ | (3) $c :]0; +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$
$x \mapsto \frac{\sin x}{e^x - 1}$ | (5) $e :]0; +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$
$x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ |
| (2) $b :]0; +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$
$x \mapsto \frac{(1+x)^n - 1}{2x}$ | (4) $d :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbf{R}$
$x \mapsto \frac{1}{2 + 2^{\tan x}}$ | (6) $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$
$x \mapsto x \sin(\frac{1}{x})$ |

Corrigé 290. (1) $a(x) = \frac{(x+1)(x^2 - x + 7)}{(x+1)(x^2 - x + 1)}$, d'où $\lim_{x \rightarrow -1} a(x) = 3$.

(2) $b(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{nx}{2x}$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0} b(x) = \frac{n}{2}$.

(3) $c(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x}$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0} c(x) = 1$.

(4) On rappelle que $2^{\tan x} = \exp(\tan(x) \ln(2))$. Sous cette forme, on a immédiatement $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0$.

(5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\sin$ n'a pas de limite en $+\infty$. Donc e n'est pas prolongeable par continuité en 0 (la fonction oscille entre -1 et 1 de plus en plus "vite" au voisinage de 0; cela se comprend puisque la fréquence du sinus devient infinie...)

(6) $-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$, d'où avec le théorème d'encadrement $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ (la fonction oscille de plus en plus vite, mais son amplitude se réduit : le graphe de f est dans le cône délimité par les droites d'équation $y = x$ et $y = -x$).