

Suites réelles et complexes

Exercice 214. Déterminer, si elles existent, les limites des suites de terme général :

- | | | | |
|----------------------------------|---|---|---|
| (1) $\frac{1}{n+2}$; | (6) $\frac{1+e^{-n}}{4+e^n}$; | (11) $\sqrt{n^2+1}-n$; | (16) $\sum_{p=1}^n \frac{1}{(n+p)^2}$; |
| (2) $\frac{n^2-5n}{3n^2+4n^3}$; | (7) $\frac{e^{2n}+3}{(e^n+5)^2}$; | (12) $\left(n^2+\frac{1}{n}\right)e^{-n^2}$; | (17) $\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k!$; |
| (3) $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$; | (8) $\frac{2^n+3^n}{4 \cdot 2^n-3^{n+1}}$; | (13) $(-1)^n$; | (18) $\frac{1}{n} [\sqrt{n}]$; |
| (4) $\sqrt{n+3}-\sqrt{n}$; | (9) $\frac{10^{n+3}}{n+3^{2n+1}}$; | (14) $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$; | (19) $\frac{\cos(n^3)}{n^2}$; |
| (5) $\frac{2^n}{n^6+n^3+1}$; | (10) $\frac{\ln(n^2+1)}{n+1}$; | (15) $n+(-1)^n\sqrt{n}$; | (20) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$. |

Corrigé 214. (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n+2 = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+2} = 0$.

(2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. $u_n = \frac{n^2(1-\frac{5}{n})}{n^3(\frac{3}{n}+4)}$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(3) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. $u_n = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

(4) Soit $n \in \mathbf{N}$. $u_n = \frac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(5) Soit $n \in \mathbf{N}$. $u_n = \frac{2^n}{n^6(1+n^{-3}+n^{-6})}$, donc avec le théorème des croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

(6) Par opérations on obtient immédiatement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(7) Soit $n \in \mathbf{N}$. $u_n = \frac{e^{2n}(1+3e^{-2n})}{e^{2n}(1+10e^{-n}+25e^{-2n})}$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

(8) Soit $n \in \mathbf{N}$. $u_n = \frac{3^n((\frac{2}{3})^n+1)}{3^n(4(\frac{2}{3})^n-3)}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{1}{3}$.

(9) Soit $n \in \mathbf{N}$. $u_n = \frac{1000}{n9^{-n}+3} \left(\frac{10}{9}\right)^n$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1000}{n9^{-n}+3} = \frac{1000}{3}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

(10) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. $u_n = \frac{2\ln(n)}{n+1} + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n+1}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(n)}{n+1} = 0$ (croissances comparées) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n+1} = 0$ (opérations sur les limites), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(11) Soit $n \in \mathbf{N}$. $u_n = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2}}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(12) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2e^{-n^2} = 0$ par croissances comparées et composition, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n^2}}{n} = 0$ par opérations, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(13) $\lim_{p \rightarrow +\infty} (-1)^{2p} = 1$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} (-1)^{2p+1} = -1$, donc la suite n'admet pas de limite.

(14) $\lim_{p \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{8p\pi}{4}\right) = 1$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{(8p+4)\pi}{4}\right) = -1$, donc la suite n'admet pas de limite.

(15) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. $u_n = n(1 + (-1)^n n^{-1/2})$. Donc $n(1 - n^{-1/2}) \leq u_n$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

(16) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. $\frac{1}{(n+p)^2} \leq \frac{1}{n^2}$, donc $\sum_{p=1}^n \frac{1}{(n+p)^2} \leq \frac{n}{n^2}$, puis, avec le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(17) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. $u_n = 1 + \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n-1} k!$, donc $u_n \geq 1$.

Par ailleurs, pour $n \geq 3$, $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n-2} k! \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{(n-2)(n-2)!}{n!} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)}$. Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

(18) On a, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{\sqrt{n}-1}{n} < \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ et on conclut par encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(19) On a, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $-\frac{1}{n^2} \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$, donc on conclut par encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(20) Soit $n \geq 3$. $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq \frac{5}{6}$, puis $u_n \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$ et par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

.....

Exercice 225. On introduit les suites u et v de termes généraux respectifs $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que les suites u et v sont adjacentes. Qu'en déduit-on ?
2. Donner un terme de la suite u qui fournit une approximation à 10^{-6} près de la limite ℓ de u .
3. Déterminer à l'aide de votre calculatrice une approximation à 10^{-3} près de ℓ .
4. Étudier $\sqrt{6\ell}$. Que peut-on conjecturer ?

Corrigé 225. 1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$, donc u est croissante. De plus, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)^2} \leq 0$, donc v est décroissante. Enfin, $v_n - u_n = \frac{1}{n}$, donc $\lim u - v = 0$. Finalement les suites u et v sont adjacentes et convergent ainsi vers une même limite.

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Le théorème de convergence des suites adjacentes assure que $u_n \leq \ell \leq v_n$. En particulier, $0 \leq \ell - u_n = \underbrace{(\ell - v_n)}_{\leq 0} + (v_n - u_n) \leq v_n - u_n$. Or $v_n - u_n = \frac{1}{n}$, donc pour $n \geq 10^6$, $|u_n - \ell| = u_n - \ell \leq 10^{-6}$.
3. Pour calculer les termes de la suite avec la calculatrice, on peut définir la suite par récurrence, en posant $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$. On obtient $\ell \approx u_{1000} \approx 1,644$. On peut aussi écrire une fonction python :

```
def somme(n):
    S = 0 # initialisation de la somme
    for k in range(1, n+1): # 1<=k<n+1
        S = S + 1/k**2
    return S
```

4. On obtient $\sqrt{6\ell} \approx 3,141$, on peut donc conjecturer que $\ell = \frac{\pi^2}{6}$.