
Variables aléatoires

.....

Exercice 412. Soient X et Y deux variables indépendantes définies par :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}.$$

Notons $Z = XY$.

Montrer que les variables aléatoires X , Y , Z sont indépendantes deux à deux, mais qu'elles ne sont pas mutuellement indépendantes.

Corrigé 412. Déterminons la loi de Z :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = 1) &= \mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1)) + \mathbb{P}((X = -1) \cap (Y = -1)) \\ &= \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(X = -1)\mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(Z = -1) &= \mathbb{P}((X = -1) \cap (Y = 1)) + \mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = -1)) \\ &= \mathbb{P}(X = -1)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

On calcule :

$$\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{4} \quad \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Z = -1) = \frac{1}{4} \quad \mathbb{P}(X = -1)\mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{4} \quad \mathbb{P}(X = -1)\mathbb{P}(Z = -1) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X = 1) \cap (Z = 1)) &= \mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1)) = \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}((X = 1) \cap (Z = -1)) &= \mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = -1)) = \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}((X = -1) \cap (Z = 1)) &= \mathbb{P}((X = -1) \cap (Y = -1)) = \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}((X = -1) \cap (Z = -1)) &= \mathbb{P}((X = -1) \cap (Y = 1)) = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

ce qui montre que X et Z sont indépendantes. On obtient de même l'indépendance de Y et Z (en échangeant les rôles de X et Y). Les variables aléatoires X , Y et Z sont donc indépendantes deux à deux.

Comparons $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1, Z = 1)$ et $\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)\mathbb{P}(Z = 1)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)\mathbb{P}(Z = 1) &= \frac{1}{8} \\ \mathbb{P}(X = 1, Y = 1, Z = 1) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

car $(X = 1, Y = 1) \subset (Z = 1)$. Ainsi, $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1, Z = 1) \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)\mathbb{P}(Z = 1)$, ce qui montre que les variables aléatoires X , Y et Z ne sont pas mutuellement indépendantes.

.....

Exercice 413. Montrer que deux variables de Bernoulli X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1).$$

Corrigé 413. Soit X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli.

- Si X et Y sont indépendantes, alors en particulier $\mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1)) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)$.
- Réciproquement, supposons que $\mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1)) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)$.

On sait que $\{(Y = 0), (Y = 1)\}$ est un système complet d'événements. Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 0)) + \mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1)) &= \mathbb{P}(X = 1) \\ \mathbb{P}((X = 0) \cap (Y = 0)) + \mathbb{P}((X = 0) \cap (Y = 1)) &= \mathbb{P}(X = 0)\end{aligned}$$

De même, puisque $\{(X = 0), (X = 1)\}$ est un système complet d'événements :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1)) + \mathbb{P}((X = 0) \cap (Y = 1)) &= \mathbb{P}(Y = 1) \\ \mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 0)) + \mathbb{P}((X = 0) \cap (Y = 0)) &= \mathbb{P}(Y = 0)\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 0)) &= \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1)) \\ &= \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) \\ &= \mathbb{P}(X = 1)(1 - \mathbb{P}(Y = 1)) \\ &= \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 0) \\ \mathbb{P}((X = 0) \cap (Y = 1)) &= \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1)) \\ &= \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) \\ &= \mathbb{P}(Y = 1)(1 - \mathbb{P}(X = 1)) \\ &= \mathbb{P}(Y = 1)\mathbb{P}(X = 0) \\ \mathbb{P}((X = 0) \cap (Y = 0)) &= \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}((X = 0) \cap (Y = 1)) \\ &= \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 1) \\ &= \mathbb{P}(X = 0)(1 - \mathbb{P}(Y = 1)) \\ &= \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)\end{aligned}$$

ce qui montre que les variables X et Y sont indépendantes.

Exercice 414. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur un univers Ω fini, alors $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Corrigé 414. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur un univers fini. Alors, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X + Y) &= \mathbb{E}((X + Y)^2) - (\mathbb{E}(X + Y))^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(X))^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - (\mathbb{E}(Y))^2 \\ &= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \\ &= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)\end{aligned}$$

car les variables X et Y sont indépendantes, donc $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 415. Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p ($0 < p < 1$).

- Déterminer la loi conjointe du couple (S, D) , où $S = X + Y$ et $D = X - Y$.
- Déterminer les lois marginales du couple (S, D) . Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{E}(D)$.
- Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

Corrigé 415. 1. $S(\Omega) = \llbracket 0; 2 \rrbracket$ et $D(\Omega) = \llbracket -1; 1 \rrbracket$. Pour $k \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$ et $\ell \in \llbracket -1; 1 \rrbracket$, on a :

$$\mathbb{P}((S = k) \cap (D = \ell)) = \mathbb{P}\left(\left(X = \frac{k + \ell}{2}\right) \cap \left(Y = \frac{k - \ell}{2}\right)\right) = \mathbb{P}\left(X = \frac{k + \ell}{2}\right)\mathbb{P}\left(Y = \frac{k - \ell}{2}\right)$$

On en déduit le tableau :

k/ℓ	0	1	2
-1	0	$(1-p)p$	0
0	$(1-p)^2$	0	p^2
1	0	$p(1-p)$	0

- On en déduit les lois marginales :

k	0	1	2
$\mathbb{P}(S = k)$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

ℓ	-1	0	1
$\mathbb{P}(D = \ell)$	$p(1-p)$	$(1-p)^2 + p^2$	$p(1-p)$

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{k=0}^2 k\mathbb{P}(S = k) = 0 \times (1-p) + 1 \times 2p(1-p) + 2p^2 = 2p$$

$$\mathbb{E}(D) = -1 \times p(1-p) + 0 \times ((1-p)^2 + p^2) + 1 \times p(1-p) = 0$$

Remarque : on peut aussi utiliser la linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 2p$$

$$\mathbb{E}(D) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = 0$$

3. Les variables aléatoires S et D ne sont pas indépendantes car $\mathbb{P}((S = 0) \cap (D = -1)) = 0$ alors que $\mathbb{P}(S = 0) \neq 0$ et $\mathbb{P}(D = -1) \neq 0$.

Exercice 417. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par le tableau :

$Y \backslash X$	0	1	2
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
-1	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

1. Préciser les lois marginales de X et Y .
2. Donner la loi de la variable XY .
3. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$.
4. Comparer $\mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1))$ et $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(Y = 1)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Corrigé 417. 1. Les lois marginales sont données par :

x	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$

y	-1	1
$\mathbb{P}(Y = y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

2. La loi de XY est donnée par :

k	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(XY = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

3. $\mathbb{E}(Y) = -1 \times \mathbb{P}(Y = -1) + 1 \times \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 0$.

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x \in [-2; 2]} x\mathbb{P}(XY = x) = \frac{-2}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = 0.$$

- 4.

$$\mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1)) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

On remarque que $\mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1)) \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)$, ce qui montre que les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 419. Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire dont la loi conjointe est donnée par : pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \quad \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{(n+1) \times 2^n} \binom{n}{j}$$

1. Montrer que X suit une loi uniforme et que Y suit une loi binomiale.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Corrigé 419. 1. Déterminons la loi de la variable X . Soit $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Alors :

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=0}^n \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{n+1} 2^{-n} \binom{n}{j} = \frac{2^{-n}}{n+1} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 1^j 1^{n-j} = \frac{1}{n+1}$$

ce qui montre que X suit la loi uniforme sur $\llbracket 0; n \rrbracket$.

Déterminons maintenant la loi de la variable Y . Soit $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Alors :

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \sum_{i=0}^n \frac{2^{-n}}{n+1} \binom{n}{j} = \binom{n}{j} 2^{-n} = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j}$$

ce qui montre que Y suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

2. Pour $(i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2$, $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{n+1} 2^{-n} \binom{n}{j} = \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = j)$, ce qui montre que les variables X et Y sont indépendantes.

Exercice 420. On lance un dé non pipé. La variable aléatoire X est définie en donnant la valeur 2 lorsque le point marqué est pair et la valeur 1 lorsque le point marqué est impair. La variable aléatoire Y est définie en donnant la valeur 3 lorsque le point marqué est 1 ou 6 et la valeur 0 dans les autres cas.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Calculer $\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Reprendre ces questions en définissant Y de la façon suivante : Y prend la valeur 3 lorsque le point marqué est 2 ou 6, et la valeur 0 dans les autres cas.

Corrigé 420. 1. La loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau :

X/Y	1	2
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. Les lois des variables XY , X et Y sont données par :

a	0	3	6
$\mathbb{P}(XY = a)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

x	1	2
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

y	0	3
$\mathbb{P}(Y = y)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Ainsi $\mathbb{E}(XY) = 0 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{2}$, $\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $\mathbb{E}(Y) = 0 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{1}{3} = 1$, et par conséquent $\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$.

3. On remarque que pour $x \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$ et $y \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, $\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$, donc les variables X et Y sont indépendantes.
4. Cette fois-ci, la loi du couple (X, Y) est donnée par :

X/Y	1	2	$\mathbb{P}(Y = y)$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

La loi de XY est donnée par

a	0	3	6
$\mathbb{P}(XY = a)$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

Ainsi $\mathbb{E}(XY) = 6 \times \frac{1}{3} = 2$, $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$ et $\mathbb{E}(Y) = 1$, donc $\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}$.

En particulier, $\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \neq 0$, donc les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 421. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère n boules numérotées de 1 à n et n cases numérotées de 1 à n . On range au hasard les n boules dans les n cases en ne mettant qu'une seule boule par case. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note S_i la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si la i -ième boule se trouve dans la i -ième case. On note S la variable aléatoire correspondant au nombre de boules se trouvant dans la case de même numéro.

1. Exprimer la variable aléatoire S à l'aide des variables aléatoires S_i .
2. Expliciter la loi et donner l'espérance des variables aléatoires S_i .
3. Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, expliciter la loi et donner l'espérance de la variable aléatoire $S_i S_j$.
4. En déduire l'espérance et la variance de S .

Corrigé 421. 1. $S = \sum_{i=1}^n S_i$.

2. S_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$. On a donc $\mathbb{E}(S_i) = \frac{1}{n}$.
3. Soit $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La variable aléatoire $S_i S_j$ est encore une variable aléatoire de Bernoulli. Elle suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(S_i S_j = 1) = \mathbb{P}(S_i = 1)P_{(S_i=1)}(S_j = 1) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1}$. Donc $\mathbb{E}(S_i S_j) = \frac{1}{n(n-1)}$.
4. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(S_i) = \frac{n}{n} = 1$. Pour la variance : $\mathbb{V}(S) = \mathbb{E}(S^2) - \mathbb{E}(S)^2$, avec :

$$\mathbb{E}(S^2) = \mathbb{E}\left(\sum_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} S_i S_j\right) = \sum_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \mathbb{E}(S_i S_j) = \sum_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n}{n-1}$$

$$\text{Ainsi, } \mathbb{V}(S) = \frac{n}{n-1} - 1 = \frac{1}{n-1}.$$

Exercice 423. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0; 1\}$. Dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , on tire deux boules une à une, sans remise. On note X_1 le premier numéro tiré, X_2 le deuxième numéro tiré. Soit $X = \min(X_1; X_2)$ et $Y = \max(X_1; X_2)$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Calculer la loi de X et celle de Y .
3. Étudier l'indépendance des variables X et Y .

Corrigé 423. 1. On a $X < Y$ et $(X, Y)(\Omega) = \left\{ (k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid k < \ell \right\}$.

Soient $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $k < \ell$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((X, Y) = (k, \ell)) &= \mathbb{P}(X = k \cap Y = \ell) \\ &= \mathbb{P}((X_1 = k \cap X_2 = \ell) \cup (X_1 = \ell \cap X_2 = k)) \quad (\text{union disjointe}) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = k \cap X_2 = \ell) + \mathbb{P}(X_1 = \ell \cap X_2 = k) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)} \end{aligned} \quad \text{car } \text{Card}(\Omega) = \underbrace{n}_{\text{choix boule 1}} \times \underbrace{(n-1)}_{\text{choix boule 2}}$$

Donc pour tout $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $k < \ell$,

$$\mathbb{P}(X = k \cap Y = \ell) = \frac{2}{n(n-1)}.$$

2. $X(\Omega) = \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{\ell=2}^n \mathbb{P}(X = k \cap Y = \ell) \quad \text{car } \{Y = 2\}, \dots, \{Y = n\} \text{ est un système complet d'événements} \\ &= \sum_{\ell=k+1}^n \mathbb{P}(X = k \cap Y = \ell) \\ &= \sum_{\ell=k+1}^n \frac{2}{n(n-1)} \\ &= \frac{2(n-k)}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

On a par ailleurs $Y(\Omega) = \llbracket 2, n \rrbracket$. Soit $\ell \in \llbracket 2, l \rrbracket$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = \ell) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(Y = \ell \cap X = k) \quad \text{car } \{X = 1\}, \dots, \{X = n - 1\} \text{ est un système complet d'événements} \\ &= \sum_{k=1}^{\ell-1} \mathbb{P}(Y = \ell \cap X = k) \\ &= \frac{2(\ell - 1)}{n(n + 1)}.\end{aligned}$$

3. $\{X = 3 \cap Y = 2\} = \emptyset$, donc $\mathbb{P}(X = 3 \cap Y = 2) = 0$. Or $\mathbb{P}(X = 3) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y = 2) \neq 0$. Ainsi $\mathbb{P}(X = 3 \cap Y = 2) \neq \mathbb{P}(X = 3)\mathbb{P}(Y = 2)$ et les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.