Suites réelles et complexes

Exercice 226. Montrer que la suite s de terme général

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

converge. On pourra montrer que les suites extraites $(s_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes.

Corrigé 226. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. $s_{2n+2} - s_{2n} = \dfrac{-1}{(2n+2)(2n+1)}$, donc $(s_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante. De plus, $s_{2n+3} - s_{2n+1} = \dfrac{1}{(2n+3)(2n+2)}$, donc $(s_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante. Enfin, $s_{2n+1} - s_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n+1} - s_{2n} = 0$. Ainsi les suites sont adjacentes, et convergent vers une même limite. D'après le théorème de convergence des suites adjacentes, on en déduit que s converge vers cette même limite.
Remarque : la méthode utilisée ici fonctionne pour toute suite de terme général de la forme $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$ avec $\lim a = 0$ (on reverra des suites de ce type plus tard).

Exercice 227. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1. Montrer que les deux suites ainsi définies sont adjacentes. En déduire qu'elles convergent vers une même limite ℓ.
2. Donner un terme de u qui fournit une approximation de ℓ à 10^{-3} près. A l'aide de votre calculatrice, trouver cette approximation et conjecturer la valeur de ℓ.
3. En raisonnant par l'absurde, montrer que ℓ est irrationnel.

Corrigé 227.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$, donc u est croissante. De plus,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}$$

   donc pour v est décroissante. Enfin, $v_n - u_n = \dfrac{1}{nn!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que les suites u et v sont adjacentes. Le théorème de convergence des suites adjacentes assure alors que u et v convergent ainsi vers une même limite.

2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. $0 \leqslant \ell - u_n = (\ell - v_n) + (v_n - u_n) \leqslant v_n - u_n$ puisque $\ell - v_n \leqslant 0$. Or $v_n - u_n = \dfrac{1}{n \cdot n!}$. On rappelle que pour tout $n \geqslant 4$, $n! \geqslant n^2$, d'où $n \cdot n! \geqslant n^3$ puis $v_n - u_n \leqslant 10^{-3}$ pour $n \geqslant 10$. On obtient $\ell \approx u_{10} \approx 2,718$ (avec la calculatrice ou un programme python, voir ci-après). On peut donc conjecturer $\ell = \mathrm{e}$.
   Méthode alternative Puisque $n \longmapsto n!$ croit très rapidement, on peut se contenter d'observer les premiers termes de $v - u$ pour atteindre le premier inférieur à 10^{-3}. En observant les premiers termes $n \longmapsto n \cdot n!$. On obtient $\ell \approx u_6 \approx 2,718$.

```python
# Calcul "direct" de n!
def fact(n):
    if (n == 0):
        return 1
```

```python
    else:
        F = 1
        for k in range(2, n+1):
            F = F * k
        return F


# Autre solution : méthode récursive pour calculer n!
def fact2(n):
    if (n == 0):
        return 1
    else:
        return n * fact2(n-1)


# Calcul de la somme de l'exercice
def somme(n):
    S = 0
    for k in range(0, n+1):
        S = S + 1/fact(k)
    return S
```

3. Supposons $\ell \in \mathbf{Q}$. Alors il existe $(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^{\star}$ tel que $\ell = \frac{a}{b}$. Pour $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n \leqslant \frac{a}{b} \leqslant v_n.$$

Donc, pour $n = b$:

$$u_b \leqslant \frac{a}{b} \leqslant v_b \iff bb!u_b \leqslant bb!\frac{a}{b} \leqslant bb!v_b \iff \underbrace{bb!\sum_{p=0}^{b}\frac{1}{p!}}_{\in\mathbf{Z}} \leqslant \underbrace{b!\frac{a}{b}}_{\in\mathbf{Z}} \leqslant \underbrace{bb!\sum_{p=0}^{b}\frac{1}{p!}}_{\in\mathbf{Z}} + \underbrace{bb!\frac{1}{bb!}}_{=1}$$

Donc l'entier $bb!\frac{a}{b}$ est égal soit à l'entier $bb!u_b$, soit à l'entier $bb!v_b = bb!u_b + 1$ (entier compris entre deux entiers consécutifs), puis ℓ est égal à u_b ou v_b.
Supposons $\ell = u_b$. Comme u est strictement croissante, $u_b < u_{b+1} \leqslant \ell$, ce qui est contradictoire. De même on montre que $\ell = u_a$ est absurde. Dans tout les cas, une contradiction est levée, donc $\ell \notin \mathbf{Q}$.