
Variables aléatoires et intégration

.....
Exercice 425. Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes ($n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$). Ces appels sont indépendants les uns des autres, et pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est de $p \in]0; 1[$. On note $q = 1 - p$, et X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Quelle est la loi de X ? Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Après ses n appels, le secrétaire demande une deuxième fois, et dans les mêmes conditions, chacune des personnes qu'il n'a pas réussi à joindre la première fois. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus dans cette deuxième série d'appels. On note $Z = X + Y$ le nombre de correspondants obtenus au total.
 - (a) Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\ell \in \llbracket 0, n - k \rrbracket$, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(Y = \ell | X = k)$.
 - (b) Déterminer la loi de Z .

Corrigé 425. 1. X compte le nombre de succès obtenus lors de la répétition de n fois la même épreuve de Bernoulli (appeler une personne) dont la probabilité de succès (« la personne décroche ») est p . Puisque ces répétitions sont faites de manière indépendante les unes des autres, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. D'après le cours, on en déduit immédiatement $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$.

2. (a) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Soit $\ell \in \llbracket 0, n - k \rrbracket$.
La loi conditionnelle de Y sachant $\{X = k\}$ est une loi binomiale de paramètres $n - k$ (on essaie d'appeler $n - k$ personnes) et p (cf. question 1.). Ainsi $\mathbb{P}(Y = \ell | X = k) = \binom{n-k}{\ell} p^\ell (1 - p)^{n-k-\ell}$.
- (b) $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. Soit $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Les événements $\{X = 0\}, \dots, \{X = n\}$ forment un système complet donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = r) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(Z = r \cap X = k) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(Y = r - k \cap X = k) && \text{car } Z = X + Y \\ &= \sum_{k=0}^r \mathbb{P}(Y = r - k \cap X = k) && \text{car } \mathbb{P}(Y = r - k \cap X = k) = 0 \text{ si } r - k < 0 \\ &= \sum_{k=0}^r \mathbb{P}(Y = r - k | X = k) \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^r \binom{n-k}{r-k} p^{r-k} (1-p)^{n-k-(r-k)} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^r \binom{r-k}{n-k} \binom{n}{k} p^r (1-p)^{2n-k-r}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$,

$$\binom{n-k}{r-k} \binom{n}{k} = \frac{(n-k)!}{(r-k)!(n-r)!} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(r-k)!(n-r)!} = \frac{r!}{k!(r-k)!} \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{r}{k} \binom{n}{r}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = r) &= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{2n-k-r} \\ &= \binom{n}{r} p^r (1-p)^{2n-2r} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (1-p)^{r-k} 1^k \\ &= \binom{n}{r} p^r ((1-p)^2)^{n-r} (1-p+1)^r \\ &= \binom{n}{r} (p(2-p))^r (1-p)^{n-r} \\ &= \binom{n}{r} P^r (1-P)^{n-r} && \text{avec } P = p(2-p). \end{aligned}$$

Finalement, $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p(2-p))$.

.....

Exercice 426. Sans les calculer, comparer les deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 x^2 \, dx \text{ et } J = \int_0^1 \sqrt{1+x^4} \, dx.$$

Corrigé 426. Soit $x \in [0; 1]$. Alors $x^2 \leq 1$, puis $1 \leq \sqrt{1+x^4}$ puis $x^2 \leq \sqrt{1+x^4}$. La croissance de l'intégrale assure alors, puisque $0 < 1$,

$$\int_0^1 x^2 \, dx \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^4} \, dx.$$

.....

Exercice 427. Donner un exemple de fonction en escalier positive sur $[0; 1]$, non nulle, et dont l'intégrale sur $[0; 1]$ est nulle.

Corrigé 427. Considérons la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 0$ si $x \neq \frac{1}{2}$ et $f(\frac{1}{2}) = 1$. Alors f est une fonction en escalier sur $[0; 1]$, positive et non nulle car $f(\frac{1}{2}) \neq 0$. De plus

$$\int_0^1 f(t) \, dt = 0 \times \left(\frac{1}{2} - 0\right) + 0 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

.....

Exercice 428. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\int_0^1 P^2(t) \, dt = 0$. Montrer que $P = 0$.

Corrigé 428. P est un polynôme à coefficients réels, donc $x \mapsto P^2(x)$ est une fonction continue et positive sur $[0; 1]$. Puisque son intégrale est nulle, alors d'après la stricte positivité de l'intégrale, pour tout $x \in [0; 1]$, $P^2(x) = 0$. Le polynôme P possède ainsi une infinité de racines (tous les réels de $[0; 1]$), c'est donc le polynôme nul.

.....

Exercice 429. Montrer que

$$\frac{\pi}{4} < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos(x)} < \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Corrigé 429. La fonction cosinus étant décroissante sur $[0; \frac{\pi}{4}]$, on a pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos(x) \leq 1.$$

Par conséquent,

$$1 \leq \cos(x) \leq \sqrt{2}.$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)} - 1$ est continue, positive sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ et non nulle (car cosinus n'est pas constante sur $[0; \frac{\pi}{4}]$). Donc, d'après la stricte positivité de l'intégrale,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos(x)} - 1 \right) dx > 0,$$

d'où l'on tire, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos(x)} > \frac{\pi}{4}.$$

On obtient de même l'autre inégalité en considérant $x \mapsto \sqrt{2} - \frac{1}{\cos(x)}$.