
Suites réelles et complexes

.....

Exercice 228. Introduisons $f : x \mapsto e^x + x$ définie sur $\mathbf{R}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution réelle. On notera x_n cette solution.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ainsi définie est monotone.
3. En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ admet une limite, puis déterminer celle-ci.

Corrigé 228. 1. f est dérivable avec $f' : x \mapsto e^x + 1$, donc f est strictement croissante. Par ailleurs f est continue, $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$. Le théorème de la bijection assure alors que $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est bijective. En particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution.

2. Soit $n \in \mathbf{N}$. $x_n = f^{-1}(n)$. Or f^{-1} est de même sens de variation que f , à savoir strictement croissante. Ainsi $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est strictement croissante.

Autre solution. $e^{x_n} + x_n = n$ et $e^{x_{n+1}} + x_{n+1} = n + 1$, donc $(\star) e^{x_{n+1}} - e^{x_n} + x_{n+1} - x_n = 1$. Si $x_{n+1} - x_n \leq 0$, alors $e^{x_{n+1}} - e^{x_n} \leq 0$ par croissance de $\exp$, et donc l'égalité $(\star)$ est contredite.

3. Puisque la suite x est croissante, elle admet une limite $\ell \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Supposons $\ell < +\infty$. En passant à la limite dans $e^{x_n} + x_n = n$, on obtient $e^\ell + \ell = +\infty$, ce qui est absurde. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

Autre solution. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, f continue et f est strictement croissante, le théorème de la bijection assure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$. En particulier, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(n) = +\infty$ et ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

.....

Exercice 229. On considère l'équation $(E_n) : x^n - x - 1 = 0$, où $n \geq 2$. On introduit, pour $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto x^n - x - 1$.

1. Montrer que pour $n \geq 2$, (E_n) admet une unique solution dans l'intervalle $[1; +\infty[$; on note x_n cette solution.
2. Déterminer, pour $n \geq 2$, le signe de $f_n(x_{n+1})$, et en déduire le sens de variation de $(x_n)_{n \geq 2}$.
3. Montrer que $(x_n)_{n \geq 2}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
4. En remarquant que $x_n = (1 + x_n)^{\frac{1}{n}}$, montrer que $\ell = 1$.

Corrigé 229. 1. Soit $n \geq 2$. f_n est dérivable et $f'_n : x \mapsto nx^{n-1} - 1$. Or, pour $x \geq 1$, $x^{n-1} \geq 1$, d'où $f'_n(x) \geq n - 1 > 0$ puisque $n \geq 2$. Ainsi f_n est strictement croissante sur $[1; +\infty[$. Par ailleurs, f_n est continue, donc le théorème de la bijection assure que f_n établit une bijection de $[1; +\infty[$ sur $\left[f_n(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)\right] = [-1; +\infty[$.

Or $0 \in [-1; +\infty[$, donc l'équation (E_n) admet une unique solution.

2. Soit $n \geq 2$. $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n - x_{n+1} - 1$. Or $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, i.e. $x_{n+1}^{n+1} - x_{n+1} - 1 = 0$, i.e. $x_{n+1} - 1 = x_{n+1}^{n+1}$. Donc $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n - x_{n+1} - 1 = (x_{n+1}^{n+1} - x_{n+1} - 1) = x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n+1} \leq 0$ puisque $x_{n+1} \geq 1$. Or $f_n(x_n) = 0$, d'où $f_n(x_{n+1}) - f_n(x_n) \leq 0$. Or f_n est strictement croissante, donc cette inégalité conduit à $x_{n+1} \leq x_n$, ce qui induit que x est décroissante.

3. x est décroissante et minorée, donc le théorème de minoration assure que x est convergente.

4. On a $(1 + x_n)^{\frac{1}{n}} = (x_n^n)^{\frac{1}{n}} = x_n$.

Par ailleurs, $(1 + x_n)^{\frac{1}{n}} = x_n$ se réécrit $(\star) \frac{1}{n} \ln(1 + x_n) = \ln(x_n)$. En passant à la limite dans $(\star)$, on obtient :

$$\underbrace{\frac{1}{n} \underbrace{\ln(1 + x_n)}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\ln(1+\ell) > 0}}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{0}} = \underbrace{\ln(x_n)}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\ln(\ell)}}$$

(c'est très mal rédigé ☹) d'où $\ln(\ell) = 0$, puis $\ell = 1$.