Probabilités sur un univers fini

Exercice 344. Soit A, B, C trois événements. Donner une expression mathématique des événements suivants :

1. $D =$« aucun des événements A, B, C n'est réalisé » ;
2. $E =$« au moins un des événements A, B, C est réalisé » ;
3. $F =$« exactement un des événements A, B, C est réalisé » ;
4. $G =$« au plus un des événements A, B, C est réalisé ».

Corrigé 344.

1. $D = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
2. $E = \overline{D} = A \cup B \cup C$.
3. $F = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.
4. $G = D \cap F$.

Exercice 345. On lance dix fois de suite une pièce. Pour tout $k \in [\![1, 10]\!]$, on note A_k l'événement « on obtient pile au k-ième lancer ». Exprimer les événements suivants à l'aide des événements A_k :

1. $B =$« le premier pile est obtenu au deuxième lancer » ;
2. $C =$« le premier face est obtenu au quatrième lancer » ;
3. $D_n =$« le premier face est obtenu au n-ième lancer » (où $n \in [\![2, 10]\!]$) ;
4. $E =$« le second pile est obtenu au quatrième lancer » ;
5. $F =$« au plus un face est tiré » ;
6. $G =$« on n'observe jamais de séquence (Pile,Face) ».

Corrigé 345.

1. $B = \overline{A_1} \cap A_2$.
2. $C = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A_4}$.
3. $D_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k \right) \cap \overline{A_n}$;
4. $E = (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A_4}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cap \overline{A_4}) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4})$.
5. $F = \underbrace{\left(\bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j} \cup \left(\bigcap_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} A_k \right) \right)}_{\text{exactement un face}} \cup \underbrace{\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k \right)}_{\text{aucun face}}$.
6. Dans ce cas, on a uniquement des faces, puis uniquement des piles. D'où $G = \bigcup_{j=1}^{n} \left(\underbrace{\bigcap_{k=1}^{j} \overline{A_k}}_{j \text{ fois face}} \cap \underbrace{\bigcap_{k=j+1}^{n} A_k}_{\text{le reste est pile}} \right)$.

Exercice 346. On considère un dé truqué à six faces. Les probabilités d'apparition des faces paires sont égales, de même pour les faces impaires. La probabilité d'obtenir une face paire est deux fois celle d'obtenir une face impaire. Quelle est la probabilité d'obtenir une face inférieure à 3 ?

Corrigé 346. Notons x la probabilité d'obtenir une face paire, et y celle d'obtenir une face impaire. On a $\left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 3y & = & 1 \\ x & = & 2y \end{array} \right.$, d'où $(x, y) = (\frac{2}{9}, \frac{1}{9})$. Ainsi la probabilité cherchée est $2x + y = \frac{5}{9}$.

Exercice 347. Cinquante pièces arrivent dans une usine, dont quatre sont défectueuses. Le contrôle qualité de l'usine teste au hasard dix pièces, et renvoie le lot s'il trouve une pièce défectueuse. Quelle est la probabilité que la livraison passe le contrôle qualité ?

Corrigé 347. On numérote les pièces et on note $\Omega = \{ A \in \mathcal{P}([\![1,50]\!]) \mid \mathrm{Card}(A) = 10\}$. On pose $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω. Notons B l'événement « au moins une pièce du prélèvement est défectueuse ». On a alors

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \frac{\mathrm{Card}(\overline{B})}{\mathrm{Card}(\Omega)} = 1 - \frac{\binom{46}{10}}{\binom{50}{10}} \approx 0,60.$$

....

Exercice 348. On parie au hasard sur une course de dix chevaux. Quelles sont les probabilités de gagner :

1. au tiercé dans le désordre ? (on précisera l'univers utilisé) ;
2. au tiercé dans l'ordre ?

Corrigé 348.

1. Dans ce cas, l'ordre ne compte pas. On pose alors $\Omega = \{ A \in \mathcal{P}([\![1,10]\!]) \mid \mathrm{Card}(A) = 3\}$, et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme. Ainsi la probabilité cherchée est $\dfrac{1}{\binom{10}{3}} = \dfrac{1}{120}$.
2. Ici, l'ordre compte. On pose alors $\Omega = \left\{ (x,y,z) \in [\![1,10]\!]^3 \,\middle|\, x \neq y,\ x \neq z\, y \neq z \right\}$ l'ensemble des $3-$arrangements de $[\![1,10]\!]$. Ainsi, la probabilité cherchée vaut $\dfrac{1}{10 \times 9 \times 8} = \dfrac{1}{720}$ (on a 6 fois moins de chance, ce qui s'explique aussi par le fait qu'il y a $3! = 6$ façons de mélanger les trois premiers chevaux).

....

Exercice 349. Le code d'une carte bancaire est une suite ordonnée de quatre chiffres pris au hasard dans l'ensemble $[\![0,9]\!]$. Calculer la probabilité qu'un code :

1. soit formé de chiffres distincts ;
2. soit formé d'une suite strictement croissante ;
3. comporte trois fois exactement le même chiffre ;
4. ne comporte que des chiffre impairs.

Corrigé 349. Puisque l'ordre compte, on note $\Omega = [\![0,9]\!]^4$ l'ensemble des $4-$listes de $[\![0,9]\!]$, et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme.

1. Posons A l'événement « le code est formé de chiffres distincts ». Pour choisir le premier chiffre, il y a 10 possibilités, puis 9 pour le second, etc. Ainsi, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{10^4}$.
2. Posons B l'événement « le code est formé d'une suite strictement croissante ». Il y a $\binom{10}{4}$ façon de choisir 4 chiffres tous distincts, et une seule façon de les ordonner. Ainsi, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\binom{10}{4}}{10^4}$.
3. Posons C l'événement « le code comporte trois fois exactement le même chiffre ». On choisit le chiffre à répéter : 10 possibilités. On choisit le chiffre qui sera seul : 9 possibilités. On choisit la position du chiffre seul : 4 possibilités. Finalement, $\mathbb{P}(C) = \dfrac{10 \times 9 \times 4}{10^4}$.
4. Notons D l'événement « le code ne comporte que des chiffres impairs ». Il y a 5 possibilités pour chaque chiffre, donc $\mathbb{P}(D) = \dfrac{5^4}{10^4} = \dfrac{1}{16}$.