
Intégration

.....

Exercice 430. On cherche à déterminer l'ensemble E des fonctions f numériques continues sur $[0; 1]$ telles que

$$\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4.$$

1. Soit $f \in E$. Calculer

$$\int_0^1 (f - f^2)^2.$$

2. Conclure.

Corrigé 430. 1. $\int_{[0;1]} (f - f^2)^2 = \int_{[0;1]} (f^2 - 2f^3 + 4f^4) = \int_{[0;1]} f^2 - 2 \int_{[0;1]} f^3 + \int_{[0;1]} f^4 = 0$ d'après les hypothèses.

2. Soit $f \in E$. Alors $(f - f^2)^2$ est une fonction continue et positive sur $[0; 1]$. D'après la question précédente et la stricte positivité, $(f - f^2)^2$ est la fonction nulle sur $[0; 1]$. Ainsi, pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) = f^2(x)$, donc $f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$ (ce qui ne signifie pas que f est constante égale à 0 ou constante égale à 1).

Supposons f non constante. Alors il existe $(a, b) \in [0; 1]^2$ tel que $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$. f étant continue sur $[0; 1]$, elle est un particulier continue sur $[a; b]$ et le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{2}$, ce qui est absurde puisque les seules valeurs prises par f sont 0 ou 1.

Ainsi f est constante, donc f est soit la fonction nulle soit la fonction constante égale à 1.

Réciproquement, on vérifie que ces deux fonctions sont bien éléments de E .

Finalement, $E = \{x \mapsto 0\} \cup \{x \mapsto 1\}$.

.....

Exercice 431. 1. Montrer que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos(t) \leq 1$.

2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt$ est définie sur $\mathbf{R}^*$.

3. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Encadrer l'expression $\frac{\cos(t)}{t^2}$ pour tout $t \in [x, 2x]$ et en déduire un encadrement de $f(x)$.

4. Prouver que f admet une limite finie à droite en 0 que l'on déterminera.

5. Que peut-on dire concernant la limite à gauche en 0 de f ?

Corrigé 431. 1. On sait que pour tout réel t , $\cos(t) \leq 1$, c'est donc encore vrai pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

Pour l'autre inégalité, on peut étudier la fonction $t \mapsto \cos(t) - 1 + \frac{t^2}{2}$ (en dérivant deux fois), ou utiliser la formule de Taylor avec reste intégral : $\cos$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ donc, pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$,

$$\cos(t) = \cos(0) - \sin(0)t - \frac{\cos(0)}{2}t^2 + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} \cos^2(x) dx = 1 - \frac{t^2}{2} + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} \sin(x) dx.$$

Or, puisque $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, pour $x \in [0; t]$, $\sin(x) \geq 0$, d'après la positivité de l'intégrale, on obtient

$$\int_0^t \frac{(t-x)^2}{2} \sin(x) dx \geq 0.$$

Ainsi $\cos(t) \geq 1 - \frac{t^2}{2}$.