
Probabilités sur un univers fini

.....

Exercice 350. Un sac de bonbons contient 10 bonbons rouges, 15 bonbons oranges et 20 bonbons jaunes. Un enfant plonge la main dans le sac et en ressort quatre bonbons. Avec quelle probabilité obtient-il

- (a) quatre bonbons de la même couleur ?
- (b) un bonbon au moins de chaque couleur ?
- (c) le même nombre de bonbons rouges et de bonbons jaunes ?

Corrigé 350. Notons Ω l'ensemble des 10-combinaisons de l'ensemble des 45 bonbons, et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme.

- (a) On disjoint suivant la couleur, pour obtenir $\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{10}{4} + \binom{15}{4} + \binom{20}{4}}{\binom{45}{4}}$.
- (b) On peut disjointre suivant la couleur répétée :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{10}{2} \times \binom{15}{1} \times \binom{20}{1} + \binom{10}{1} \times \binom{15}{2} \times \binom{20}{1} + \binom{10}{1} \times \binom{15}{1} \times \binom{20}{2}}{\binom{45}{4}}.$$

- (c) On peut disjointre suivant qu'il y ait 0, 1 ou 2 bonbons rouges :

$$\mathbb{P}(C) = \frac{\binom{15}{4} + \binom{10}{1} \times \binom{20}{1} \times \binom{15}{2} + \binom{10}{2} \times \binom{20}{2}}{\binom{45}{4}}.$$

.....

Exercice 351. On range aléatoirement cinq boules numérotées de 1 à 5 dans quatre boîtes numérotées de 1 à 4.

- 1. Quel est le nombre de rangements différents possibles ?
- 2. Quelle est la probabilité que toutes les boules soient rangées dans la même boîte ?
- 3. Quelle est la probabilité que deux boîtes exactement soient vides ?
- 4. Même question avec une boîte vide.
- 5. En déduire la probabilité qu'aucune boîte ne soit vide.

Corrigé 351. 1. Pour chaque boule, il y a 4 possibilités, donc 4^5 rangements différents.

- 2. On choisit la boîte (4 possibilités) et on met toutes les boules dedans. Ainsi la probabilité cherchée est $\frac{4}{4^5} = \frac{1}{4^4}$.
- 3. On choisit les deux boîtes vides ($\binom{4}{2}$ possibilités), puis on range les boules dans les deux autres boîtes : 2 possibilités pour chaque boule : 2^5 possibilités, auxquelles il faut enlever le cas où toutes les boules sont dans une même boîte (2 possibilités). Ainsi, la probabilité cherchée vaut $\frac{\binom{4}{2} \times (2^5 - 2)}{4^5}$.

- 4. On peut répartir les boules comme suit, si on veut exactement une boîte vide : 3-1-1-0 ou 2-2-1-0. Dans le premier cas, il faut choisir la boîte contenant trois boules (4 choix), les trois boules en question ($\binom{5}{3}$ choix), la boîte contenant la quatrième boule (3 choix) et la boîte contenant la dernière boule (2 choix ; si on veut on peut remplacer ces derniers choix par le choix des deux boîtes non vides puis de la boule allant dans la première boîte non vide, ce qui revient au même). Il y a donc $4 \times 10 \times 3 \times 2 = 240$ répartitions 3-1-1-0.

Pour les 2-2-1-0, il y a 4 choix pour la boîte contenant une seule boule, 5 choix pour la boule allant dans cette boîte, 3 choix pour la boîte vide, et enfin $\binom{4}{2}$ choix pour les deux boules allant dans la première des deux boîtes restantes, soit $4 \times 5 \times 3 \times 6 = 360$ possibilités.

Finalement, la probabilité d'avoir exactement une boîte vide est $\frac{600}{1024}$.

- 5. L'événement contraire de « aucune boîte vide » est $A =$ « au moins une boîte est vide ». On disjoint avec $A_i =$ « i boîtes exactement sont vides », de sorte que $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ (A_4 est impossible car au moins une boîte contiendra des boules). $\mathbb{P}(A_3)$ a été calculée à la question 2., $\mathbb{P}(A_2)$ a été calculée à la question 3. et $\mathbb{P}(A_1)$ a été calculée à la question 4, d'où

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{4}{4^5} - \frac{180}{4^5} - \frac{600}{4^5} = \frac{240}{1024} = \frac{15}{64} \approx 0,234.$$

.....

Exercice 352. On lance trois dés cubiques non pipés. Calculer la probabilité d'obtenir :

1. trois chiffres tous distincts ;
2. exactement deux chiffres distincts.

Corrigé 352. On suppose les dés discernables pour être dans une situation d'équiprobabilité. L'univers est alors $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^3$.

1. Il y a 6 choix pour le premier dé, 5 pour le second et 4 pour le dernier. Ainsi $\mathbb{P}(A) = \frac{6 \times 5 \times 4}{6^3}$.
 2. On choisit la place du chiffre distinct, puis le chiffre répété et enfin le dernier chiffre : $\mathbb{P}(B) = \frac{3 \times 6 \times 5}{6^3}$.
-

Exercice 353. On tire quatre cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir :

1. un carré ;
2. au moins un as ;
3. une suite de quatre cartes consécutives, non nécessairement de la même couleur ;
4. deux cartes rouges et deux cartes noires ;
5. exactement une dame et deux piques.

Corrigé 353. Posons $\Omega = \{A \in \mathcal{P}(\llbracket 1, 32 \rrbracket) \mid \text{Card}(A) = 4\}$. On notera $A, B, \dots$ les événements pour chaque question.

1. On choisit la valeur de la carte, d'où $\mathbb{P}(A) = \frac{8}{\binom{32}{4}}$.
 2. Ne choisir aucun as revient à choisir 4 cartes parmi 28, d'où $\mathbb{P}(B) = 1 - \frac{\binom{28}{4}}{\binom{32}{4}}$.
 3. Pour choisir une telle suite, on peut choisir la valeur de la première carte (parmi $8 - 3 = 5$, car les plus hautes valeurs ne peuvent être sélectionnées si on veut pouvoir choisir encore trois cartes de valeurs plus élevées), puis les couleurs des cartes (les valeurs sont imposées...), d'où $\mathbb{P}(C) = \frac{5 \times 4^4}{\binom{32}{4}}$.
 4. $\mathbb{P}(D) = \frac{\binom{16}{2} \times \binom{16}{2}}{\binom{32}{4}}$.
 5. Notons E_0 l'ensemble des tirages sans la dame de pique et E_1 l'ensemble des tirages avec la dame de pique. On a, en choisissant la dame puis les piques et enfin la carte restante (qui ne doit être ni pique, ni dame), $\text{Card}(E_0) = 3 \times \binom{7}{2} \times 21$ (3 choix pour la dame non pique, $\binom{7}{2}$ façons de choisir deux cartes parmi les piques non dames, et il reste une carte à choisir parmi les $32 - 8 - 3 = 21$ non piques non dames) et $\text{Card}(E_1) = 1 \times 7 \times \binom{21}{2}$ (on choisit la dame de pique, un pique restant non dame, et deux cartes non pique non dame), d'où $\mathbb{P}(E) = \frac{3 \times \binom{7}{2} \times 21 + 1 \times 7 \times \binom{21}{2}}{\binom{32}{4}}$.
-

Exercice 354. Soient A et B deux événements de probabilités respectives $\frac{1}{4}$ et $\frac{2}{3}$. On suppose que $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{8}$.

1. Calculer la probabilité qu'au moins un des deux événements se réalise.
2. Calculer la probabilité qu'exactly un des deux se réalise.

Corrigé 354. 1. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{19}{24}$.

2. $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = (\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)) + (\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) = \frac{2}{3}$ (on rappelle que la formule de filtration assure que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$).
-

Exercice 355. Une urne contient une boule blanche, une boule verte et une boule rouge, toutes trois indiscernables au toucher. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On tire successivement et avec remise n boules de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir :

1. la première et la dernière boule de la même couleur ;
2. un tirage bicolore ;

3. au moins une boule de chaque couleur.

Corrigé 355. Notons $\Omega = \{B, V, R\}^n$.

1. On choisit la couleur de la première boule et des $n-2$ boules centrales (la dernière doit être celle de la première), d'où $\mathbb{P}(A) = \frac{3 \times 3^{n-2}}{3^n} = \frac{1}{3}$.
2. Choix des deux couleurs ($\binom{3}{2} = 3$ possibilités), choix des boules ($2^n - 2$, car il faut enlever les deux tirages monochromes). Ainsi $\mathbb{P}(B) = \frac{3 \times (2^n - 2)}{3^n} = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$.
3. Il y a trois tirages monochromes, et les tirages bicolores ont été dénombrés à la question précédente, d'où $\mathbb{P}(C) = 1 - \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$.

Exercice 356. On jette trois dés non pipés. Calculer la probabilité que l'un d'entre eux soit tombé sur six sachant qu'ils sont tombés sur trois faces distinctes.

Corrigé 356. Notons $A = \text{« les dés sont tombés sur 3 faces distinctes »}$ et $B = \text{« au moins un dé est tombé sur 6 »}$. On a $\mathbb{P}(A) = \frac{6 \times 5 \times 4}{6^3}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3 \times 5 \times 4}{6^3}$ (3 choix pour le dé sur 6, et les deux autres valeurs doivent être différentes). $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1}{2}$.

Exercice 357. On tire cinq cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Calculer la probabilité d'obtenir les 4 as.
2. Un joueur dévoile deux cartes de son jeu et ce sont des as. Calculer la probabilité qu'il détienne les 4 as.

Corrigé 357. 1. Seule la dernière carte peut changer, d'où, en notant A l'événement de la question, $\mathbb{P}(A) = \frac{28}{\binom{32}{5}} \approx 0,0001$.

2. Notons $B = \text{« le joueur possède au moins 2 as »}$. On choisit les couleurs puis les autres cartes par disjonction suivant que le joueur possède exactement 2, 3 ou 4 as : $\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} + \binom{4}{3} \times \binom{28}{2} + 28}{\binom{32}{5}}$. On en déduit

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{28}{\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} + \binom{4}{3} \times \binom{28}{2} + 28} \approx 0,0013.$$

Remarque 1 : cette probabilité est totalement différente de celle d'avoir deux As parmi trois cartes tirées au hasard dans un jeu de 32 cartes (qui vaut 0,034). La probabilité calculée dans la question est plus faible, ce qu'on peut intuitivement comprendre car il reste moins d'as si deux sont déjà montrés.

Remarque 2 : $\mathbb{P}_B(A)$ est plus important que $\mathbb{P}(A)$, ce qui est intuitif également : on a une information supplémentaire puisqu'on sait que le joueur possède deux as ; il a donc plus de chance de posséder 4 as.