
Intégration

.....

Exercice 431. 1. Montrer que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos(t) \leq 1$.

2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt$ est définie sur $\mathbf{R}^*$.
3. Soit $x \in]0; \frac{\pi}{4}]$. Encadrer l'expression $\frac{\cos(t)}{t}$ pour tout $t \in [x, 2x]$ et en déduire un encadrement de $f(x)$.
4. Prouver que f admet une limite finie à droite en 0 que l'on déterminera.
5. Que peut-on dire concernant la limite à gauche en 0 de f ?

Corrigé 431. 1. On sait que pour tout réel t , $\cos(t) \leq 1$, c'est donc encore vrai pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

Pour l'autre inégalité, on peut étudier la fonction $t \mapsto \cos(t) - 1 + \frac{t^2}{2}$ (en dérivant deux fois), ou utiliser la formule de Taylor avec reste intégral : $\cos$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ donc, pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$,

$$\cos(t) = \cos(0) - \sin(0)t - \frac{\cos(0)}{2}t^2 + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} \cos^2(s) ds = 1 - \frac{t^2}{2} + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} \sin(s) ds.$$

Or, puisque $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, pour $x \in [0; t]$, $\sin(x) \geq 0$, d'après la positivité de l'intégrale, on obtient

$$\int_0^t \frac{(t-x)^2}{2} \sin(x) dx \geq 0.$$

Ainsi $\cos(t) \geq 1 - \frac{t^2}{2}$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$. $f(x)$ est définie si et seulement si $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ est continue sur le segment d'extrémités x et $2x$.

Or la fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ est continue sur $\mathbf{R}^*$. Ainsi, si $f(x)$ est définie, alors $x \in \mathbf{R}^*$.

Réciproquement, soit $x \in \mathbf{R}^*$.

- Si $x > 0$, alors $[x; 2x] \subset]0; +\infty[$;
- si $x < 0$, alors $[2x; x] \subset]-\infty; 0[$.

Dans les deux cas, la fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ est continue sur le segment d'extrémité x et $2x$, ce qui montre que $f(x)$ est bien défini. Finalement, f est définie sur $\mathbf{R}^*$.

3. Supposons $x \in]0; \frac{\pi}{4}]$. Alors, pour tout $t \in [x; 2x]$, on a $t \in]0; \frac{\pi}{2}]$ donc d'après la question 1. et puisque $t > 0$:

$$\frac{1}{t} - \frac{t}{2} \leq \frac{\cos(t)}{t} \leq \frac{1}{t}.$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient, puisque $x < 2x$:

$$\ln(2) - \frac{3}{4}x^2 \leq f(x) \leq \ln(2).$$

4. D'après la question précédente, puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln(2) - \frac{3}{4}x^2 \right) = \ln(2)$, le théorème d'encadrement assure que f admet une limite à droite en 0, avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ln(2)$.

5. Remarquons que f est paire. En effet, si $x \in \mathbf{R}^*$, alors $-x \in \mathbf{R}^*$ et

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\cos(t)}{t} dt = \int_x^{2x} \frac{\cos(-u)}{-u} (-1) du = f(x).$$

Par parité, f admet donc aussi une limite à gauche en 0 avec $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \ln(2)$.

.....

Exercice 432. Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$.

1. Soit $g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$. Prouver que la suite (v_n) de terme général $v_n = \int_a^b g(t) \cos(nt) dt$ est une suite bornée.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$. Prouver que la suite (I_n) de terme général $I_n = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt$ converge vers 0. On pourra utiliser la question précédente après avoir fait une intégration par parties.

Corrigé 432. 1. Soit $n \in \mathbf{N}$. D'après l'inégalité de la moyenne, puisque $a < b$,

$$|v_n| \leq \int_a^b |g(t) \cos(nt)| dt.$$

Or pour tout $t \in [a; b]$, $|g(t) \cos(nt)| \leq |g(t)| \times |\cos(nt)| \leq |g(t)|$. Alors, par croissance de l'intégrale :

$$|v_n| \leq \int_a^b |g(t)| dt$$

ce qui montre que la suite (v_n) est bornée.

2. Les fonctions f et $t \mapsto \cos(nt)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a; b]$, donc, par intégration par parties, on obtient :

$$I_n = \left[f(t) \frac{-\cos(nt)}{n} \right]_a^b + \int_a^b f'(t) \frac{\cos(nt)}{n} dt = \frac{1}{n} (f(a) \cos(na) - f(b) \cos(nb)) + \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \cos(nt) dt.$$

D'après l'inégalité triangulaire et la question précédente (puisque $f' \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbf{R})$) :

$$|I_n| \leq \frac{1}{n} (|f(a)| + |f(b)|) + \frac{1}{n} \int_a^b |f'(t)| dt.$$

Le théorème d'encadrement assure alors la convergence de la suite (I_n) vers 0.

Exercice 433. Déterminer le domaine de définition et la limite en 0^+ de la fonction

$$F : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt.$$

- Corrigé 433.**
- Soit $x \in \mathbf{R}$. $F(x)$ est défini si et seulement si $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur le segment d'extrémités x et $2x$. Or, la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbf{R}^*$. Ainsi, si $F(x)$ est défini, alors $x \in \mathbf{R}^*$. Réciproquement, soit $x \in \mathbf{R}^*$. Les réels x et $2x$ sont de même signe. Ainsi, si $x > 0$, alors $[x; 2x] \subset]0; +\infty[$ donc $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $[x; 2x]$, donc $F(x)$ est bien défini. De même, si $x < 0$, alors $[2x; x] \subset]-\infty; 0[$, donc $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $[2x; x]$, puis $F(x)$ est bien défini. Finalement, F est définie sur $\mathbf{R}^*$.
 - De plus on sait que $\sin$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée $\cos$ qui est bornée : $|\cos| \leq 1$. Donc $\sin$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbf{R}$. En particulier, puisque $\sin(0) = 0$, on a pour tout $t \in \mathbf{R}$, $|\sin(t)| \leq |t|$. Soit $x \in]0; \frac{\pi}{4}[$. Alors pour tout $t \in [x; 2x]$, $\sin(t) \geq 0$. De plus, pour tout $t \in [x; 2x]$, on a $0 \leq \sin(t) \leq t$ donc, puisque $t > 0$, $0 \leq \frac{\sin(t)}{t} \leq 1$. Par croissance de l'intégrale on obtient, puisque $x < 2x$,

$$0 \leq F(x) \leq x.$$

Le théorème d'encadrement assure alors que $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$.

Exercice 434. Déterminer le domaine de définition et donner un équivalent simple en $+\infty$ de

$$F : x \mapsto \int_x^{x+1} \sqrt{1+t^3} dt.$$

- Corrigé 434.**
- Soit $x \in \mathbf{R}$. $F(x)$ est défini si et seulement si $t \mapsto \sqrt{1+t^3}$ est continue sur $[x; x+1]$. La fonction $t \mapsto \sqrt{1+t^3}$ est définie sur $\{t \in \mathbf{R} \mid t^3 \geq -1\} = [-1; +\infty[$; construite comme une composée de fonctions continues sur leur domaine de définition, elle est alors continue sur $[-1; +\infty[$. Ainsi, si $F(x)$ est défini, alors $t \mapsto \sqrt{1+t^3}$ est continue sur $[x; x+1]$, donc continue en x , donc $x \geq -1$. Réciproquement, pour $x \in [-1; +\infty[$, on a $x+1 \geq -1$ donc $[x; x+1] \subset [-1; +\infty[$; la fonction $t \mapsto \sqrt{1+t^3}$ est alors continue sur $[x; x+1]$. $F(x)$ est alors bien défini. Finalement, F est définie sur $[-1; +\infty[$.

- Construite comme composée de fonctions croissantes, $t \mapsto \sqrt{1+t^3}$ est croissante sur $[-1; +\infty[$. Soit $x \in [0; +\infty[$. Alors pour tout $x \in [x; x+1]$,

$$\sqrt{1+x^3} \leq \sqrt{1+t^3} \leq \sqrt{1+(x+1)^3}$$

et par croissance de l'intégrale, on obtient, puisque $x < x+1$,

$$\int_x^{x+1} \sqrt{1+t^3} dt \leq \int_x^{x+1} \sqrt{1+t^3} dt \leq \int_x^{x+1} \sqrt{1+(x+1)^3} dt$$

i.e.

$$\sqrt{1+x^3} \leq F(x) \leq \sqrt{1+(x+1)^3}.$$

Puisque $x > 0$, on en déduit alors, en divisant par $x^{\frac{3}{2}}$:

$$\sqrt{x^{-3}+1} \leq \frac{F(x)}{x^{\frac{3}{2}}} \leq \sqrt{x^{-3}+(1+x^{-1})^3}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x^{-3}} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^{-3}+(1+x^{-1})^3} = 1$, donc d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x^{\frac{3}{2}}} = 1,$$

ce qui montre que $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{\frac{3}{2}}$.