
Probabilités sur un univers fini

.....

Exercice 358. Une maladie rare touche un individu sur cent mille. On dispose d'un test de dépistage qui est positif pour 95% des personnes malades et pour 0,5% des individus sains. Un individu est testé positif. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

Corrigé 358. Notons T = « le test est positif » et M = « l'individu est malade ». L'énoncé assure que $\mathbb{P}(M) = 10^{-5}$, $\mathbb{P}_M(T) = 0,95$ et $\mathbb{P}_{\overline{M}}(T) = 0,005$. D'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(T) + \mathbb{P}(\overline{M}) \times \mathbb{P}_{\overline{M}}(T) = 10^{-5} \times 0,95 + (1 - 10^{-5}) \times 0,005$. La probabilité demandée est alors obtenue avec la formule de Bayes : $\mathbb{P}_T(M) = \frac{\mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(T)}{\mathbb{P}(T)} \approx 0,002$.

.....

Exercice 359. Lors d'une interrogation, un étudiant se trouve face à une question dont m réponses possibles sont proposées et une seule est correcte. Soit l'étudiant connaît la réponse à la question, soit il choisit au hasard une réponse parmi les m proposées. La probabilité que l'étudiant connaisse la bonne réponse est $p \in]0; 1[$. Sachant que l'étudiant a répondu correctement, quelle est la probabilité qu'il ait répondu en connaissant la bonne réponse ?

Corrigé 359. Notons B = « l'étudiant connaît la bonne réponse », et C = « l'étudiant a répondu correctement ». L'énoncé fournit $\mathbb{P}(B) = p$, $\mathbb{P}_B(C) = 1$ et $\mathbb{P}_{\overline{B}}(C) = \frac{1}{m}$. La probabilité que l'étudiant réponde correctement est donnée par la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}_B(C) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(C) \times \mathbb{P}(\overline{B}) = p + \frac{1-p}{m} = \frac{pm + 1 - p}{m}$. La formule de Bayes fournit alors $\mathbb{P}_C(B) = \frac{\mathbb{P}_B(C) \times \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{pm}{pm + 1 - p}$ (notons que cette formule est cohérente, puisque pour $m = 1$ on retrouve $\mathbb{P}_C(B) = p$).

.....

Exercice 360. Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{3}$. Calculer $\mathbb{P}(B)$ dans le cas où A et B sont disjoints, puis lorsque A et B sont indépendants, et enfin lorsque A est inclus dans B .

Corrigé 360.

1. Si A et B sont disjoints, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A) = \frac{1}{12}$.
2. Si A et B sont indépendants, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$, donc $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, puis $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{9}$.
3. Si $A \subset B$, $A \cup B = B$, donc $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$.

.....

Exercice 361. Une urne contient cinq boules blanches et sept rouges. On effectue trois tirages d'une boule suivant la procédure suivante : à chaque tirage, on prend une boule et on la remet dans l'urne en y ajoutant une boule de même couleur. Calculer les probabilités d'obtenir :

1. aucune boule blanche ;
2. exactement une boule blanche ;
3. trois boules blanches ;
4. exactement deux boules blanches.

Corrigé 361. On note B_i l'événement « au i -ième tirage, on obtient la boule blanche ».

1. Avec la formule des probabilités composées, on obtient $\mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}) = \mathbb{P}(\overline{B_1}) \times \mathbb{P}_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) \times \mathbb{P}_{\overline{B_1} \cap \overline{B_2}}(\overline{B_3}) = \frac{7}{12} \times \frac{8}{13} \times \frac{9}{14}$.
2. On disjoint l'événement comme suit : $(B_1 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}) \cup (\overline{B_1} \cap B_2 \cap \overline{B_3}) \cup (\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3)$, d'où une probabilité égale à $\frac{5}{12} \times \frac{7}{13} \times \frac{8}{14} + \frac{7}{12} \times \frac{5}{13} \times \frac{8}{14} + \frac{7}{12} \times \frac{8}{13} \times \frac{5}{14} = 3 \times \frac{5 \times 7 \times 8}{12 \times 13 \times 14}$. On pouvait aussi choisir la position de la boule blanche (3 possibilités), puis compter les choix d'une boule blanche et deux boules rouges ($5 \times 7 \times 8$).

3. Comme en 1., on a $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{5 \times 6 \times 7}{12 \times 13 \times 14}$.

4. L'événement contraire revient à piocher aucune boule blanche, ou exactement deux boules blanches, ou trois boules blanches, donc avec les questions précédentes la probabilité cherchée vaut

$$1 - \frac{7 \times 8 \times 9 + 3 \times 5 \times 7 \times 8 + 5 \times 6 \times 7}{12 \times 13 \times 14}.$$

.....
Exercice 362. On tire deux pièces de monnaie équilibrées et on considère les événements A = « la première pièce tombe sur face », B = « la deuxième pièce tombe sur face » et C = « les deux pièces tombent du même côté ». Les événements A , B , C sont-ils indépendants deux à deux ? Et mutuellement indépendants ?

Corrigé 362. On a $\Omega = \{P, F\}^2$. On a $A = \{(F, P), (F, F)\}$, d'où $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. De même, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$. Enfin, $C = \{(F, F), (P, P)\}$, d'où $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$.

1. $A \cap B = \{(F, F)\}$, d'où $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$ et ainsi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

$A \cap B = B \cap C = A \cap C$, d'où $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$.

Finalement, A , B et C sont indépendants deux à deux.

2. $A \cap B \cap C = A \cap B$, d'où $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$, et pourtant $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}$, donc A , B et C ne sont pas mutuellement indépendants.