
Espaces vectoriels

- Exercice 463.** 1. Dans $\mathbf{R}^2$, le vecteur $(7, 3)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(2, 4)$ et $(-1, 2)$?
2. Dans $\mathbf{R}^3$, le vecteur $(5, 5, 1)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(2, 3, 0)$ et $(3, 2, 0)$?
3. Dans $\mathbf{R}^3$, le vecteur $(0, -2, 3)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(2, 2, 3)$ et $(3, -1, 2)$?
4. Dans $\mathbf{R}^2$, le vecteur $(6\sqrt{2} - 15, 12 - 5\sqrt{3})$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(1, \sqrt{2})$ et $(\sqrt{3}, 1)$?
5. Dans $\mathbf{R}[X]$, le polynôme $P = 16X^3 - 7X^2 - 4 + 21X$ est-il combinaison linéaire des polynômes

$$A = 8X^3 - 5X^2 + 1 \quad \text{et} \quad B = X^2 + 7X - 2 ?$$

6. Dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, l'application $x \mapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire des applications $\sin$ et $\cos$?
7. Dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, l'application $x \mapsto \cos(2x)$ est-elle combinaison linéaire des applications $\sin^2$ et $\cos^2$?
8. Dans l'espace vectoriel des suites réelles, la suite $(1)_{n \in \mathbf{N}}$ est-elle combinaison linéaire des suites

$$(n^2)_{n \in \mathbf{N}}, \quad (2^n)_{n \in \mathbf{N}}, \quad (2n - 1)_{n \in \mathbf{N}} ?$$

- Corrigé 463.** 1. Le vecteur $(7, 3)$ est combinaison linéaire de $(2, 4)$ et $(-1, 2)$ si et seulement s'il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $(7, 3) = a(2, 4) + b(-1, 2)$.
Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

$$(7, 3) = a(2, 4) + b(-1, 2) \iff \begin{cases} 7 &= 2a - b \\ 3 &= 4a + 2b \end{cases} \iff \begin{cases} a &= \frac{17}{8} \\ b &= -\frac{11}{4} \end{cases}$$

Ainsi $(7, 3)$ est bien combinaison linéaire des deux vecteurs proposés.

2. Pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $a(2, 3, 0) + b(3, 2, 0)$ aura une troisième coordonnée nulle. Donc $(5, 5, 1)$ n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs proposés.
3. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Le système

$$\begin{cases} 2a + 3b &= 0 \\ 2a - b &= -2 \\ 3a + 2b &= 3 \end{cases}$$

n'a pas de solution, donc $(0, -2, 3)$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs proposés.

4. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. On a

$$\begin{cases} a + \sqrt{3}b &= 6\sqrt{2} - 15 \\ \sqrt{2}a + b &= 12 - 5\sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 6\sqrt{2} \\ b &= -5\sqrt{3} \end{cases}$$

donc $(6\sqrt{2} - 15, 12 - 5\sqrt{3})$ est une combinaison linéaire des vecteurs proposés.

5. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

$$\begin{aligned} aA + bB = P &\iff 8aX^3 + (-5a + b)X^2 + 7bX + a - 2b = 16X^3 - 7X^2 + 21X - 4 \\ &\iff \begin{cases} 8a &= 16 \\ -5a + b &= -7 \\ 7b &= 21 \\ a - 2b &= -4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a &= 2 \\ b &= 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc P est combinaison linéaire de A et B .

6. Notons $f : x \mapsto \sin(2x)$. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Supposons que $f = a \sin + b \cos$. En évaluant cette égalité en $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$, on trouve $(a, b) = (0, 0)$. Comme f n'est pas la fonction nulle, on en déduit que f n'est pas une combinaison linéaire de $\sin$ et $\cos$.
7. La formule $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, assure que $x \mapsto \cos(2x)$ est combinaison linéaire de $\sin^2$ et $\cos^2$.

8. Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. Posons $u_n = an^2 + b2^n + c(2n - 1)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Supposons que $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Si $b \neq 0$, on a $(u_n) = (b2^n)$ qui ne peut converger vers 1, ce qui est contradictoire. Ainsi $b = 0$ et, si $a \neq 0$, $u_n = an^2 + c(2n - 1) \sim an^2$, qui ne peut converger vers 1, ce qui est encore absurde. Donc $a = 0$. Or $c(2n - 1) \neq 1$, donc on n'a pas de combinaison linéaire ici.

Exercice 464. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel dans lequel ils sont inclus ?

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid x = y\} & B &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq y\} \\ C &= \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid |x| = |y|\} & D &= \{(x, y, z) \in \mathbf{K}^3 \mid x = 0\} \\ E &= \{(x, y, z) \in \mathbf{K}^3 \mid x = 2y = 3z\} & F &= \{(x, y, z) \in \mathbf{K}^3 \mid xyz = 0\} \\ G &= \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \mid f(1) = 0\} & H &= \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \mid f(3) \leq 0\} \\ I &= \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \mid f(3) = 2f(2)\} & J &= \{P \in \mathbf{K}[X] \mid \deg(P) \leq 5\} \\ K &= \{P \in \mathbf{K}[X] \mid P(0) = P'(1) = 0\} & L &= \{P \in \mathbf{K}[X] \mid \deg(P) = 5\} \\ M &= \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \mid f \text{ est croissante}\} & N &= \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \mid f \text{ est paire}\} \\ O &= \{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid u \text{ converge}\} & P &= \{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid u \text{ est bornée}\} \\ Q &= \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid M^{\top} + 2M = I_n\} & R &= \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid M^{\top} + M = 0\} \\ S &= \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid M^2 = M\} & T &= \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} : (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Corrigé 464. (A) • $A \subset \mathbf{K}^2$.

- $(0, 0) \in A$ car $0 = 0$.
- Soit $((a, b), (c, d)) \in A^2$. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On a $a = b$ et $c = d$, $a + c = b + d$ et $(a, b) + (c, d) \in A$. Enfin, $\lambda a = \lambda b$, d'où $\lambda(a + b) \in A$.

Ainsi A est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^2$.

(B) $(1, 0) \in B$ et pourtant $-(1, 0) = (-1, 0) \notin B$, donc B n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$.

(C) $(-1, 1) \in C$ et $(1, 1) \in C$, et pourtant $(-1 + 1, 1 + 1) \notin C$. Donc C n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^2$.

(D) • $D \subset \mathbf{K}^3$.

- $(0, 0, 0) \in D$ car la première coordonnée de $(0, 0, 0)$ est nulle.
- Soit $(u, v, \lambda) \in D^2 \times \mathbf{K}$. Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbf{K}^4$ tels que $u = (0, a, b)$ et $v = (0, c, d)$. On a $u + v = (0, a + c, b + d) \in D$ et $\lambda u = (0, \lambda a, \lambda b) \in D$.

Donc D est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^3$.

(E) • $E \subset \mathbf{K}^3$.

- $(0, 0, 0) \in E$.
- Soit $(u, v, \lambda) \in E^2 \times \mathbf{K}$. Il existe $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbf{K}^6$ tel que $u = (a, b, c)$ et $v = (d, e, f)$. On a $a = 2b = 3c$ et $d = 2e = 3f$. On a $u + v = (a + d, b + e, c + f)$, avec $a + b = 2b + 2e = 2(b + e)$ et $a + b = 3c + 3f = 3(c + f)$. Donc $u + v \in E$. De plus, $\lambda u = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$, avec $\lambda a = \lambda(2b) = 2(\lambda b)$ et $\lambda a = \lambda(3c) = 3(\lambda c)$, d'où $\lambda a \in E$.

Finalement, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^3$.

(F) On a $(1, 0, 0) \in F$, $(0, 1, 1) \in F$, et pourtant la somme de ces vecteurs $(1, 1, 1) \notin F$. Donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^3$.

(G) • $G \subset \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

- $0 \in G$ car la fonction nulle est nulle en 1.
- Soit $(f, g, \lambda) \in G$. On a $f(1) = 0$ et $g(1) = 0$. Donc $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0$ et ainsi $f + g \in G$. De plus, $(\lambda f)(1) = \lambda f(1) = 0$, donc $\lambda f \in G$.

Ainsi G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

(H) $-1 \in H$ et pourtant $-(-1) \notin H$, donc H n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

(I) • $I \subset \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

- $0 \in I$ car la fonction nulle ne prend que la valeur nulle.
- Soit $(f, g, \lambda) \in I^2 \times \mathbf{R}$. On a $(f + g)(3) = f(3) + g(3) = 2f(2) + 2g(2) = 2(f + g)(2)$ et $(\lambda f)(3) = \lambda f(3) = 2(\lambda f)(2)$, donc $f + g \in I$ et $\lambda f \in I$.

Ainsi I est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

(J) • $J \subset \mathbf{K}[X]$.

- $0 \in J$ car $\deg(0) = -\infty$.
- Soit $(P, Q, \lambda) \in J^2 \times \mathbf{K}$. On a $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q)) \leq 5$, d'où $P + Q \in J$. De plus, $\deg(\lambda P) \leq \deg(P) \leq 5$ (avec égalité si $\lambda \neq 0$).

Donc J est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$.

- (K) • $K \subset \mathbf{K}[X]$.
- $0 \in K$.
 - Soit $(P, Q, \lambda) \in K^2 \times \mathbf{K}^2$. On a $(P + Q)(0) = P(0) + Q(0) = 0$ et $(P + Q)'(1) = P'(1) + Q'(1) = 0$, donc $P + Q \in K$. De plus, $\lambda P(0) = 0$ et $(\lambda P)'(1) = \lambda P'(1) = 0$.

Finalement K est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$.

- (L) La somme de X^5 et $-X^5 + 1$ n'appartient pas à L , donc L n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ (ou plus simplement $0 \notin \mathbf{R}_5[X]$).
- (M) Soit $f \in M$ non nulle. Alors $-f$ est décroissante, d'où $-f \notin M$ puis M n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.
- (N) • $N \subset \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.
- La fonction nulle est paire donc $0 \in N$.
 - Soit $(f, g, \lambda) \in N^2 \times \mathbf{R}$. Soit $x \in \mathbf{R}$. $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$, donc $f + g$ est paire. De plus, $(\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda f(x) = (\lambda f)(x)$, donc λf est paire.

Ainsi N est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

- (O) O est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, car la suite nulle est convergente, la somme de suites convergentes est convergente et le produit d'une suite convergente par un réel est convergente.
- (P) P est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, la suite nulle est bornée, la somme de suites bornées est bornée et le produit d'une suite bornée par un réel est borné.
- (Q) Q n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ car $0 \notin Q$.

- (R) • $R \subset \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
- $0 \in R$ car $0^{\top} = 0$.
 - Soit $(M, N, \lambda) \in R^2 \times \mathbf{K}$. On a $(M + N)^{\top} + (M + N) = M^{\top} + M + N^{\top} + N = 0$, donc $M + N \in R$. De plus, $(\lambda M)^{\top} + \lambda M = \lambda(M^{\top} + M) = 0$, donc $\lambda M \in R$.

Ainsi R est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

- (S) $I_n \in S$ et $-I_n \notin S$, donc S n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

(T) Méthode 1.

- $T \subset n(\mathbf{R})$.
- $0 \in T$.
- Soit $(M, N, \lambda) \in T^2 \times \mathbf{R}$. Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} c & c \\ d & d \end{pmatrix}$. On a

$$M + N = \begin{pmatrix} a + c & a + c \\ b + d & b + d \end{pmatrix} \in T \quad \text{et} \quad \lambda M = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda a \\ \lambda b & \lambda b \end{pmatrix} \in T$$

donc T est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Méthode 2. $T = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$, donc T est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 465. 1. Démontrer que les ensembles

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 3x + y - z = 0\} \quad \text{et} \quad F = \{(x, 2x, -3x) : x \in \mathbf{R}\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.

- Déterminer deux vecteurs u et v de $\mathbf{R}^3$ tels que $E = \text{Vect}(u, v)$.
- Déterminer un système d'équations cartésiennes de l'ensemble F , c'est-à-dire déterminer à quelles conditions sur les réelles a, b et c le vecteur (a, b, c) est un élément de F .
- Les ensembles $E \cap F$ et $E \cup F$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$?

Corrigé 465. 1. Aucune difficulté.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. On a

$$(x, y, z) \in E \iff z = 3x + y \iff \exists (a, b) \in \mathbf{R}^2, \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = 3a + b \end{cases}.$$

Ainsi $(1, 0, 3)$ et $(0, 1, 1)$ sont deux vecteurs générateurs de E .

3. Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$.

$$(a, b, c) \in F \iff \exists x \in \mathbf{R}, \begin{cases} a = x \\ b = 2x \\ c = -3x \end{cases} \iff \exists x \in \mathbf{R}, \begin{cases} x = a \\ x = \frac{b}{2} \\ x = \frac{-c}{-3} \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{b}{2} \\ a = -\frac{c}{3} \end{cases}.$$

Donc un système d'équation cartésienne de F est $\begin{cases} 2a - b = 0 \\ 3a + c = 0 \end{cases}$, i.e.

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases} \right\}.$$

4. *Méthode 1.* $E \cap F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases} \right\}$. Sous cette forme, on voit facilement qu'il s'agit

d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. *Méthode 2.* L'intersection de sous-espaces vectoriels est toujours un sous-espace vectoriel.

$E \cup F = \text{Vect}((1, 0, 3), (0, 1, 1)) \cup \text{Vect}((1, 2, -3))$. Or $(1, 0, 3) + (1, 2, -3) = (2, 2, 0)$ n'appartient pas à E (l'équation cartésienne n'est pas vérifiée) et n'appartient pas non plus à F (engendré par $(1, 2, -3)$, donc un vecteur de cet espace ne peut avoir sa dernière coordonnée nulle). Donc $E \cup F$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 466. Soit $F = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbf{R}^5 : x + 2y + 3z + 4t + 5u = 0 \text{ et } x + y = z + t = u\}$. Déterminer des vecteurs a et b de $\mathbf{R}^5$ de sorte que $F = \text{Vect}(a, b)$.

Corrigé 466. Soit $(x, y, z, t, u) \in \mathbf{R}^5$.

$$(x, y, z, t, u) \in F \iff \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t + 5u = 0 \\ x + y - z - t = 0 \\ x + y - u = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = -\frac{1}{10}(t + 9x) \\ z = \frac{1}{10}(x - 11t) \\ t = t \\ u = \frac{1}{10}(x - t) \end{cases}$$

Ainsi on peut choisir $a = (10, -9, 1, 0, 1)$ et $b = (0, -1, -11, 10, -1)$.

Exercice 467. Considérons

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}, G = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x - 2y - t = 0 \text{ et } x - t = 0\}.$$

Déterminer les vecteurs f_1, f_2, g_1, g_2, e de $\mathbf{R}^4$ tels que $F = \text{Vect}(f_1, f_2)$, $G = \text{Vect}(g_1, g_2)$ et $F \cap G = \text{Vect}(e)$.

Corrigé 467. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$. On a :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{3}(2z + t) \\ y = -\frac{1}{3}(z + 2t) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x - 2y - t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$$

donc on peut choisir $f_1 = (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0)$, $f_2 = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0, 1)$, $g_1 = (0, 0, 1, 0)$ et $g_2 = (1, 0, 0, 1)$. Enfin,

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y = 0 \\ x - 2y - t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -2t \end{cases}$$

donc on peut choisir $e = (1, 0, -2, 1)$.