
Probabilités sur un univers fini

.....

Exercice 363. On dispose de trois cartes : l'une a deux faces noires, une autre deux faces blanches, et la troisième une face noire et une face blanche. On tire une carte au hasard et sans la regarder, on la pose sur la table (les deux faces ont la même probabilité d'être visibles). La face observée est noire. Parieriez-vous que la face cachée est blanche ?

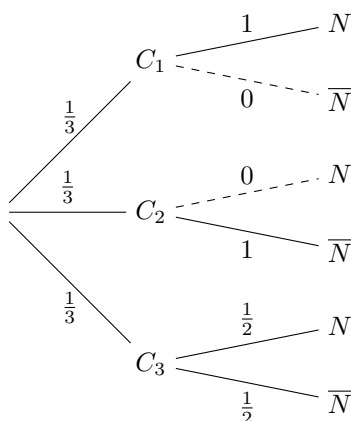
Corrigé 363. On note C_i les cartes présentées dans le même ordre que l'énoncé, et N l'événement « la face observée est noire ». On s'intéresse à $\mathbb{P}_N(C_3) = \frac{\mathbb{P}(N \cap C_3)}{\mathbb{P}(N)}$.

Par les probabilités totales, on a $\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(C_1) \times \mathbb{P}_{C_1}(N) + \mathbb{P}(C_2) \mathbb{P}_{C_2}(N) + \mathbb{P}(C_3) \mathbb{P}_{C_3}(N) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

On a au passage calculé $\mathbb{P}(N \cap C_3) = \mathbb{P}(C_3) \mathbb{P}_{C_3}(N) = \frac{1}{6}$, d'où $\mathbb{P}_N(C_3) = \frac{1}{3}$.

Remarque : pour calculer $\mathbb{P}(N)$, on aurait pu aussi considérer l'expérience aléatoire qui consiste à tirer une face au hasard : il y a autant de faces blanches que de faces noires, et on est dans une situation d'équiprobabilité, d'où $\mathbb{P}(N) = \frac{1}{2}$.

Notons qu'on aurait pu modéliser cette situation avec un arbre (à faire éventuellement au brouillon, au début, mais inutile au propre) :



.....

Exercice 364 (Problème de Monty Hall). On dispose de trois verres opaques. Le meneur du jeu a caché dix euros sous l'un de ces verres. Le joueur désigne un des trois verres.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait désigné le verre cachant l'argent ?
2. Parmi les deux verres non désignés, le meneur du jeu écarte alors un verre qu'il sait non vide. Le joueur peut alors décider de modifier son choix. Que lui conseillez-vous ?

Corrigé 364. 1. La probabilité est $\frac{1}{3}$.

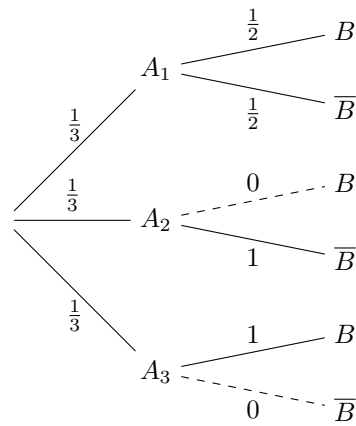
2. Notons A_i « le billet est sous i -ième verre ». On suppose sans perte de généralité que l'on a choisit le verre n°1. On note B « le meneur retourne le verre n°2 ».

- Si le billet est sous le premier verre, alors a le choix : il peut retourner soit le verre n°2, soit le verre n°3, sans préférence. Donc $\mathbb{P}_{A_1}(B) = \frac{1}{2}$.
- Si le billet est sous le deuxième verre, alors le meneur ne peut pas retourner ce verre. Donc $\mathbb{P}_{A_2}(B) = 0$.
- Supposons le billet sous le troisième verre. Le meneur ne peut pas sélectionner ce verre et il ne peut pas non plus retourner le verre que l'on a choisi (à savoir le premier). Il n'a donc pas le choix : il doit retourner le verre n°2. Ainsi $\mathbb{P}_{A_3}(B) = 1$.

La formule des probabilités totales donne alors :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2) \mathbb{P}_{A_2}(B) + \mathbb{P}(A_3) \mathbb{P}_{A_3}(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{2}.$$

On aurait pu représenter cette situation avec un arbre (ça n'est pas nécessaire et ça n'apporte rien de recopier un tel arbre dans un devoir, le calcul précédent suffit amplement) :



On observe que les probabilités conditionnelles cherchées (sachant B) ne sont pas lisibles sur l'arbre. Dans ce cas il faut toujours revenir à la formule de Bayes !

D'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_B(A_1) = \frac{\mathbb{P}_{A_1}(B)\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

et donc

$$\mathbb{P}_B(A_3) = \frac{\mathbb{P}_{A_3}(B)\mathbb{P}(A_3)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Il s'ensuit qu'il est préférable de changer de choix !