

Espaces vectoriels

Exercice 473. Soit $F = \text{Vect}((1, 0, 1), (1, 2, 3), (1, 4, 5))$ et $G = \text{Vect}((1, 2, 0), (1, 1, 1))$.

1. A quelle condition le vecteur $u = (x, y, z)$ appartient-il à F ? à G ?
2. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbf{R}^3$ tel que $F \cap G = \text{Vect}(a)$.
3. Montrer que $F + G = \mathbf{R}^3$. Cette somme est-elle directe ?

Corrigé 473. 1. On a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 4 & y \\ 1 & 3 & 5 & z \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 4 & y \\ 0 & 2 & 4 & z - x \end{array} \right)$$

donc $(x, y, z) \in F \iff y = z - x \iff x + y - z = 0$. De même,

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & x \\ 0 & -1 & y - 2x \\ 0 & 1 & z \end{array} \right).$$

Donc $(x, y, z) \in E \iff y - 2x = -z \iff -2x + y + z = 0$.

2. Soit $a = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

$$a \in F \cap G \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases} \iff \exists t \in \mathbf{R}, \begin{cases} x = \frac{2t}{3} \\ y = \frac{t}{3} \\ z = t \end{cases}$$

Donc on peut choisir $a = (2, 1, 3)$.

3. Déjà la question précédente assure que la somme ne sera pas directe.

On a immédiatement $F + G \subset \mathbf{R}^3$. Réciproquement, soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. On veut montrer qu'il existe $(a, b, c, d, e) \in \mathbf{R}^5$ tel que $a(1, 0, 0) + b(1, 2, 3) + \dots + e(1, 1, 1) = (x, y, z)$. On a :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 & y \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & z \end{array} \right) & \sim_L \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 4 & 2 & \boxed{1} & y \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & z - x \end{array} \right) \\ & \sim_L \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -1 & -3 & -1 & 0 & x - y \\ 0 & 2 & 4 & 2 & \boxed{1} & y \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & z - x \end{array} \right) \\ & \sim_L \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -3 & -7 & 0 & 0 & x - y + x - z \\ 0 & 6 & 12 & 0 & \boxed{1} & y - 2x + 2z \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & z - x \end{array} \right) \end{aligned}$$

En particulier, $(x, y, z) = (2x - y - z) \cdot (1, 0, 1) + (-2x + y + 2z) \cdot (1, 1, 1) + (x - z) \cdot (1, 2, 0) \in F + G$.

Autre méthode. On peut aussi procéder avec les équations cartésiennes. Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. $(x, y, z) \in F + H \iff \exists (a, b, c) \in F, (d, e, f) \in G, x + y + z = (a, b, c) + (d, e, f)$. On peut donc démontrer que le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ -2d + e + f = 0 \\ a + d = x \\ b + e = y \\ c + f = z \end{cases} \iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$