
Probabilités sur un univers fini

.....

Exercice 365. Une compagnie aérienne étudie l'évolution des réservations sur l'un de ses vols. Elle constate que l'état d'une place donnée évolue ainsi : elle est libre au jour 0 (jour d'ouverture des réservations), puis, si elle est libre au jour n , il y a 4 chances sur 10 pour que quelqu'un la réserve au jour $n + 1$. En revanche, si elle est réservée au jour n , il y a 9 chances sur 10 pour qu'elle soit réservée au jour $n + 1$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Notons p_n la probabilité que la place donnée soit réservée au jour n .

1. Donner la valeur de p_0 .
2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n .
3. En déduire l'expression de p_n .
4. Quelle est la limite de $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$?

Corrigé 365. 1. La place n'est pas réservée au jour 0, donc $p_0 = 0$.

2. Notons A_n « la place est réservée au jour n ». On a $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{9}{10}$ et $\mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{4}{10}$. La formule des probabilités totales donne alors la formule de récurrence :

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{A_n}) \times \mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{9}{10}p_n + \frac{4}{10}(1 - p_n) = 0,5p_n + 0,4.$$

3. La suite (p_n) est arithmético-géométrique, d'équation caractéristique $x = 0,5x + 0,4$, ce qui donne $x = 0,8$. On introduit la suite auxiliaire de terme général $b_n = p_n - 0,8$, qui vérifie $b_{n+1} = p_{n+1} + 0,8 = 0,5p_n + 0,4 - 0,8 = 0,5(p_n - 0,8) = 0,5b_n$. La suite (b_n) est donc géométrique de raison 0,5 et de premier terme $b_0 = -0,8$, donc $b_n = -0,8 \times (0,5)^n$, puis $p_n = b_n + 0,8 = 0,8(1 - 0,5^n)$.
4. Avec la question précédente, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,8$. Comme (p_n) est croissante, on constate que la proportion des places réservées dans l'avion va augmenter, mais en ne dépassant pas un plafond de 80%.
-

Exercice 366. Les poules pondent des œufs que l'on classe suivant trois calibres : A (petit), B (moyen) et C (gros). On suppose que si une poule pond un œuf d'un certain calibre, l'œuf qu'elle pondra ensuite sera du même calibre, avec une probabilité $\frac{1}{2}$, et d'un des deux autres calibres avec une probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par a_n , b_n et c_n les probabilités respectives pour que le n -ième œuf pondu par une poule soit de calibre A, B ou C.

Pour tout entier naturel n non nul, posons

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .
2. A l'aide de la question précédente, trouver une matrice U telle que $X_{n+1} = UX_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
3. Montrer que U est une combinaison linéaire des matrices J (matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1) et I_3 . Calculer J^k pour tout $k \in \mathbf{N}$ (on pourra distinguer le cas $k = 0$) et en déduire l'expression de U^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. On suppose que le premier œuf pondu par une poule est de calibre C. Déduire des questions précédentes l'expression des termes généraux des suites a , b et c , ainsi que les limites de ces suites.

Corrigé 366. Notons A_n (resp. B_n et C_n) l'événement « l'œuf pondu au n -ième jour est de calibre A (resp. B et C) ».

1. $a_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$.
De même, $b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n$.

2. On a $U = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. On a $U = \frac{1}{4}(I+J)$. On peut montrer par récurrence que $J^k = 3^{k-1}J$ pour $k \in \mathbf{N}^*$, et $J^0 = I_3$. Il s'ensuit que $U^n = \frac{1}{4^n}(I+J)^n = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k = \frac{1}{4^n} \left(I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} J \right) = \frac{1}{4^n} \left(I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k - 1 \right) J \right) = \frac{1}{4^n} I + \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n} J$.

4. On a (X_n) géométrique de raison U , d'où $X_n = U^n X_0$, i.e.
$$\begin{cases} a_n &= \frac{1}{4^n} a_0 + \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n} (a_0 + b_0 + c_0) \\ b_n &= \frac{1}{4^n} b_0 + \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n} (a_0 + b_0 + c_0) \\ c_n &= \frac{1}{4^n} c_0 + \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n} (a_0 + b_0 + c_0) \end{cases}$$
. Les limites

de a , b et c valent $\frac{1}{3}(a_0 + b_0 + c_0) = \frac{1}{3}$ (notons que ce choix ne dépend pas de l'œuf initial!).

Exercice 367. On dispose de deux dés A et B dont les faces sont soit rouges, soit blanches. Le dé A a quatre faces rouges, le dé B quatre faces blanches. On lance un dé équilibré à 6 faces. Si le résultat est 1 ou 6, on ne joue ensuite qu'avec le dé A , sinon on ne joue qu'avec le dé B . On lance ensuite le dé sélectionné un certain nombre de fois.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir « rouge » au premier jeu ? (le lancer de dé pour savoir avec quel dé jouer ne compte pas comme un jeu).
2. On a obtenu « rouge » aux deux premiers jeux. Quelle est la probabilité d'avoir rouge au troisième jeu ?
3. On a obtenu « rouge » aux n premiers jeux. Calculer la probabilité d'avoir utilisé le dé A .

Corrigé 367. On note $R_i =$ « on a obtenu rouge au i -ième lancer », $N_i =$ « on a obtenu noir au i -ième lancer », $A =$ « on a utilisé le dé A » et $B =$ « on a utilisé le dé B ».

$$1. \mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(R_1) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(R_1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$

$$2. \mathbb{P}(A \cap R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(R_1)\mathbb{P}_{A \cap R_1}(R_2)\mathbb{P}_{A \cap R_1 \cap R_2}(R_3) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2^3}{3^4} \text{ (on a } \mathbb{P}_{A \cap R_1}(R_2) = \frac{2}{3}, \text{ etc.)}. \text{ De même, } \mathbb{P}(B \cap R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{2}{3^4}. \text{ Finalement,}$$

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \mathbb{P}(A \cap R_1 \cap R_2 \cap R_3) + \mathbb{P}(B \cap R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{2^3 + 2}{3^4}$$

et ainsi, en utilisant $R_1 \perp\!\!\!\perp R_2$,

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3) = \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)} = \frac{\frac{2^3+2}{3^4}}{\frac{2^2}{3^4}} = \frac{2^3+2}{2^4} = \frac{2^2+1}{2^3}.$$

3. En reprenant les calculs de la question précédente, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n R_k\right) = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(A \cap \bigcap_{k=1}^n R_k\right) = \frac{2^n}{3^{n+1}},$$

d'où, par quotient, $\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(A) = \frac{2^n}{2^n + 2}$ (résultat cohérent, puisque lorsque n tend vers $+\infty$, cette probabilité tend vers 1 : si on obtient beaucoup de rouges, il y a d'autant plus de chance que l'on ait choisit le dé A ...).

Exercice 368. Soit $(n, r) \in (\mathbf{N}^*)^2$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire les boules au hasard, successivement, et avec remise. Le but de l'exercice est de calculer la probabilité que, sur r tirages, le plus grand des numéros obtenus soit k . Pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on considère les événements :

- $A_{k,i} =$ « le numéro obtenu au i -ième tirage est inférieur ou égal à k » ;
- $B_k =$ « sur r tirages, le plus grand numéro obtenu est inférieur ou égal à k » ;
- $C_k =$ « sur r tirages, le plus grand numéro est égal à k ».

1. Calculer $\mathbb{P}(A_{k,1})$.
2. Calculer $\mathbb{P}(B_k)$.
3. En remarquant que $C_k = B_k \cap \overline{B_{k-1}}$, en déduire $\mathbb{P}(C_k)$.

Corrigé 368. On a $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket^r$.

1. $\mathbb{P}(A_{k,1}) = \frac{k \times n^{r-1}}{n^r} = \frac{k}{n}.$
2. $\mathbb{P}(B_k) = \frac{k^r}{n^r}$ (toutes les boules doivent être choisies dans $\llbracket 1, k \rrbracket$).
3. $\mathbb{P}(C_k) = \mathbb{P}(B_k) - \mathbb{P}(B_{k-1}) = \frac{k^r - (k-1)^r}{n^r}.$